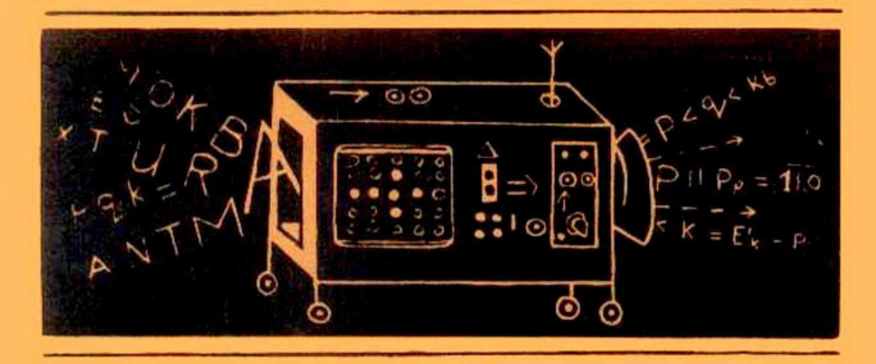
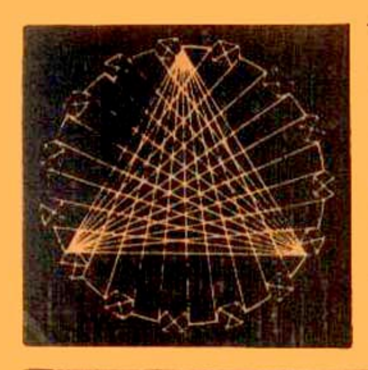
ciencia popular



Lo demostrable e indemostrable

Yu. I. Manin



En este libro la teoría de demostración matemática y las causas de la insolubilidad de algunos problemas están expuestas en un nivel bastante comprensible. El libro está distinado para jóvenes científicos y para todos aquellos que se interesan por los problemas de las matemáticas actuales.

Editorial · Mir · Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Ю. И. МАНИН

ДОКАЗУЕМОЕ И НЕДОКАЗУЕМОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКОЕ РАДИО»
МОСКВА

Ciencia popular

Lo demostrable e indemostrable

Yu. I. Manin

Editorial Mir Moscú
Rubiños 1860 - MADRID

Traducido del ruso
por E. M. Kotenko

На испанском языке

Impreso en la URSS.

Prefacio

Entre los adelantos científico-técnicos que se vinculan con las ideas de la cibernética, tiene gran importancia el amplio uso de los ordenadores para resolver problemas de cálculo, simulación y gobierno. El trabajo del ordenador, si nos apartamos de su encarnación «en hierro», consiste en procesar y engendrar textos simbólicos. Así pues, ese trabajo, representa *una actividad lingüística* muy comprensible. La actividad lingüística, antes de la aparición de los ordenadores, era una prerrogativa excepcional del hombre, y la posibilidad de su enajenación parcial provocó un enorme interés social.

Este interés se reflejó en la fórmula popular de «máquinas pensantes», en la cual, por desgracia, se efectuó la sustitución lamentable del término. La enunciación de las numerosas necesidades acerca de si la máquina puede pensar, podrían evitarse si concibiésemos qué ha de esperarse del razonamiento además y fuera de la capacidad de engendrar textos.

La actividad lingüística del ordenador es una actividad matemática en cierto sentido profundo de la palabra, incluso cuando se trata de un programa que traduce del húngaro o compone

melodías de una sola voz. Por sí mismo el «lenguaje matemático» del hombre es un asombroso hijastro-niño prodigio del lenguaje natural. La estructura y semántica del lenguaje matemático en cierto grado han sido concebidas merced a sus vínculos constantes con las ciencias naturales y la tecnología, así como debido al inmenso trabajo de los especialistas de la lógica matemática. Los correspondientes problemas para los lenguajes naturales a menudo ni siquiera han sido planteados todavía. El físico-teórico, laureado del Premio Nobel Eugene Wigner intituló con gran perspicacia uno de sus artículos «Sobre la eficacia inconcebible de las matemáticas en las ciencias naturales» mientras que no muchos pensadores corrieron el riesgo de asombrarse de la eficacia del funcionamiento del idioma en general.

Para compartir este asombro invitamos al lector a cotejar dos fragmentos cortos y adentrarse en su sentido.

«En el edificio grande de las entidades judiciales, durante la interrupción de la audiencia del expediente de los Malvinski, los miembros y el fiscal se reunieron en el despacho de Iván Egórovich Shebek, y se entabló una conversación sobre el famoso expediente de Krasovski. Fiódor Vasílievich se acaloró demostrando que el asunto no era justiciable, Iván Egórovich mantenía su criterio, y Piotr Ivánovich, que desde el principio no se había metido en la disputa, no participaba en ella y hojeaba el periódico Vedomosti recién traído».

«El número de fisiones que se originan en 1 cm^3 de una caldera por 1 s es igual a $f_t n\ (v/\Lambda) \times \times\ (3{,}9/7{,}2)$. El sentido de los factores es: la parte de neutrones térmicos absorbidos por el uranio, la densidad de los neutrones, el «inhour»

del neutrón térmico y la parte de absorciones del neutrón por el uranio, que conducen a la fisión. Admitiendo que en el acto de fisión se producen 200 MeV, debemos multiplicar (el número de fisiones/s·cm³) por (200 MeV/fisión), es decir, por (0,0003 erg/fisión) para obtener erg/s·cm³. En la expresión final aparece el producto nv, es decir, el flujo. Es preciso utilizar el flujo medio $\overline{nv}$. Se puede mostrar que para el cubo el flujo medio está asociado con el flujo en el centro, n_0v, mediante la correlación $\overline{nv} = n_0v\,(8/\pi^3)$. Definitivamente obtendremos (en kilovatios)

$$n_0v\left(\frac{8}{\pi^3}V\frac{f_t}{\Lambda}\frac{3{,}9}{7{,}2}\,3{,}2\cdot10^{-14}\right).$$

Después de sustituir los valores debidos obtenemos $4\cdot10^{-9}n_0v$. Las potencias del orden de $2{,}5\cdot10^3$ kW (Clinton) corresponden a un flujo de cerca de 10^{12} en el centro. En Hanford el flujo de neutrones en el centro de la caldera constituye aproximadamente 10^{13} n/s·cm².

El primer fragmento es el comienzo de la «Muerte de Iván Ilich» de L. N. Tolstói, el segundo ha sido tomado de las «Conferencias de la física neutrónica» de E. Fermi.

Las diferencias entre estos fragmentos, que saltan a la vista—en el tema, los requisitos acerca del nivel de preparación del lector—son las menos esenciales para nosotros. Desde luego, la novela de Tolstói apela a la experiencia de la vida más o menos humana mientras que la concepción de las conferencias de Fermi exige conocimientos específicos de un físico o un ingeniero atómico. (A propósito, la expresión «no ser justiciable» de Tolstói concierne a los términos del sistema jurídico especial, y su sentido para

un lector sin enseñanza especial quizá sea menos vago que el concepto de «neutrón térmico»).

Pero nosotros queremos llamar la atención a la siguiente circunstancia. Fermi explica cómo se calcula la potencia de un reactor atómico, es decir, cierta magnitud que en principio puede ser medida, valiéndose de las lecturas de un instrumento conveniente. En vez de esto se propone obtener la misma magnitud, elaborando un texto aritmético no complejo de tipo $\frac{3,9}{7,2} 3,2 \cdot 10^{-14} =$ $= \ldots$ Esa es precisamente aquella parte de la investigación científica que más a menudo se le suministra al ordenador (desde luego, el volumen de los cálculos y su complejidad lógica suelen ser mucho mayores). Precisamente la habitualidad de este procedimiento (aprendemos a resolver problemas a partir del primer grado) impide que el hombre adulto se extrañe: ¿por qué, en resumidas cuentas, el proceso formal de multiplicar dos fracciones decimales, usando la tabla de multiplicar y las reglas de transferencia de cifras («dos por nueve son dieciocho, escribimos el ocho y guardamos el uno en la memoria... o en el elemento de la memoria») lleva a una cierta predicción respecto del curso real de los acontecimientos? Pues en el reactor no sucede absolutamente nada que pudiera ser correlacionado, aunque sea aproximadamente con el acto elemental de calcular «dos por nueve son dieciocho». Por otra parte, con este mismo acto elemental se puede tropezar al calcular el punto de encuentro del cohete con el objetivo, la posición de un buque en el mar o el tiempo de vida del Universo, o sea, al efectuar cálculos que no tienen nada que ver con los reactores.

Claro está que el cálculo es tan solo un ejemplo primitivo de un íntegro texto matemático; sin

embargo, en él se pueden examinar los rásgos característicos del lenguaje matemático en general. En cuanto a la estructura, el lenguaje matemático está subordinado a los rígidos principios de la «ordenación correcta». Estas reglas han de garantizar la «veracidad de las conclusiones siendo verdaderas las premisas». La polisemia extraordinaria, y muy a menudo la ausencia de interpretación de cada uno de los fragmentos del texto matemático en la realidad que éste pueda describir, exige una interpretación bastante unificada en el «mundo de las ideas»: de lo contrario podremos imaginarnos siquiera aproximadamente el contenido del concepto «veracidad» (salvo los casos, cuando éste concierne a un acontecimiento singular que ocurre «aquí y ahora», y que entonces seguramente se encuentra fuera de las matemáticas).

El concepto de «veracidad» casi inevitablemente exige la abstracción de la «infinidad» ya por el simple hecho de que un correcto enunciado matemático siempre y dondequiera ha de ser correcto.

Entretanto, la actividad lingüistica en principio tiene rasgos finitos: cada texto real se divide en un número finito de unidades elementales que se reproducen unívocamente. Si no, el idioma no podría cumplir sus funciones en la memoria social y en los canales de comunicación sociales de la humanidad.

¿En qué grado, pues, pueden reflejar los textos finitos la abstracción de la infinidad matemática? Este caso especial de la cuestión general acerca de hasta qué punto el idioma es capaz de expresar el pensamiento constituye la idea fundamental del libro que ofrecemos.

Más concretamente, el libro está destinado a exponer algunos resultados actuales de la

insolubilidad de los problemas matemáticos. En rasgos generales la idea de tales problemas está muy difundida: la cuadratura del círculo concierne a uno de los ejemplos más viejos, y el problema del continuo, a uno de los más nuevos. Sin embargo, a pesar del considerable interés hacia el problema de insolubilidad, el sentido exacto de los resultados obtenidos lo conoce un círculo relativamente limitado incluso de matemáticos profesionales. En gran medida ello se explica por el hecho de que el objeto de la disciplina matemática, en cuyo interior se establecen estos resultados, no es del todo ordinario: este objeto es el modelo idealizado de las matemáticas reales en el seno de las propias matemáticas. En la concepción más amplia se trata hasta de un cuadro idealizado del conocimiento deductivo en general lo que determina el valor humanitario y gnoseológico de los teoremas de la insolubilidad.

El objetivo de este libro es doble: describir los fundamentos de la lógica matemática como modelo de matemáticas y, haciendo uso de sus medios, presentar varías demostraciones de la insolubilidad, incluso el problema del continuo según Cohen, el teorema de Tarski de la imposibilidad de expresar la veracidad y parcialmente el famoso teorema de Gödel sobre la incompletitud.

Por desgracia, fuera de los límites de este libro quedaron los problemas de la insolubilidad algorítmica. Su exposición requiere un desarrollo preliminar del aparato de las funciones recursivas o de uno de sus equivalentes (máquinas de Turing, algoritmos de Márkov). El volumen limitado del libro no permitió incluir este material.

El libro se compone de tres capítulos. Los dos primeros son una introducción a la lógica formal y han de ser accesibles para los lectores que tengan conocimientos matemáticos relativamente

escasos y ciertos hábitos de empleo de la teoría de conjuntos. El tercer capítulo, dedicado al problema del continuo, técnicamente es mucho más difícil. Sin embargo, a la presentación completa de la demostración le antecede la variante de modelo en el lenguaje de «números reales aleatorios», la cual permite, si se desea, comprender las ideas fundamentales de la construcción sin entrar en detalles exhaustivos.

Al material no del todo tradicional concierne el párrafo de la lógica cuántica con demostración del teorema de von Neumann sobre los parámetros latentes, así como la exposición del teorema de Tarski aplicando el método de Ŝmullyan. Este último ideó una variante ingeniosa del lenguaje formal de la aritmética el cual permite escribir fácilmente la fórmula que confirma su falsedad. Esto suprime la mitad de las dificultades técnicas al demostrar el teorema de Gödel sobre la incompletitud.

Por último, una parte esencial del libro la constituye una serie de digresiones no formales sobre el sentido de los conceptos matemáticos en un contexto más amplio de la cultura humana. En determinado aspecto, dichas digresiones expresan el criterio del autor sobre el problema de «motivación» de las matemáticas. Por lo visto, la lógica es capaz de argumentar las matemáticas no en mayor grado que la biología argumenta la vida.

El lector que desee ampliar sus conomicientos acerca de las cuestiones planteadas en este libro y familiarizarse con otros puntos de vista puede recurrir a la numerosa literatura, parte de la cual viene en la bibliografía. En particular, hay magníficos cursos de lógica de J. Shoenfield [1], E. Mendelson [2] y S. Kleene [3]. El libro de P. J. Cohen [7] está dedicado especial-

mente al problema del continuo. La teoría de los conjuntos, sus aspectos formales y los problemas filosóficos se exponen en los libros de N. Bourbaki [5], A. Fraenkel e Y. Bar-Hillel [17], véanse también la reseña profunda hecha por K. Gödel [20] y el artículo de P. Cohen [19]. A la teoría matemática de las funciones recursivas y de los algoritmos están dedicados especialmente los libros de V. A. Uspenski [9], A. A. Márkov [8], A. I. Máltsev [10] y H. Rogers [11], así como los artículos de V. A. Uspenski [15], Yu. I. Manin [13, 14] y Yu. Matiyasévich [12]. Los distintos puntos de vista respecto de los problemas filosóficos de los fundamentos de matemática están expuestos en los libros ya citados de S. Kleene y A. Fraenkel y de Y. Bar-Hillel, en la monografía de A. Tarski [16], así como en el interesante libro de V. N. Trostnikov [18] y en el trabajo popular de I. Lakatos [21].

Considero que este libro será de interés para los lectores de habla española.

Capítulo I

Introducción en los lenguajes formales

Gelegentlich ergreifen wir die Feder
Und schreiben Zeichen auf ein weisses Blatt,
Die sagen dies und das, es kennt sie jeder,
Es ist ein Spiel, das seine Begeln hat.

H. Hesse, Buchstaben

En caso oportuno tomamos una pluma
Y escribimos símbolos en una hoja de papel,
Nos dicen una cosa, otra; los conoce cada uno,
Se trata de un juego que sus reglas tiene.

H. Hesse, Letras

1. Generalidades

1.1. Sea A, cierto conjunto abstracto, *un alfabeto*. Las sucesiones finitas de los elementos A se denominan *expresiones* en A, las sucesiones finitas de las expresiones, *textos*.

Nosotros hablaremos de *un lenguaje con el alfabeto* A, si ciertas expresiones y textos han sido distinguidos (como «compuestos correctamente», «sensatos», etc.). Así, en el alfabeto latino A pueden distinguirse las formas de palabras del idioma inglés y frases inglesas gramaticalmente correctas. El conjunto de expresiones y textos obtenido será una aproximación operacional a la representación intuitiva del «idioma inglés».

El lenguaje Algol-60 consta de expresiones y textos distinguidos en el alfabeto {*letras latinas*} ∪ {*cifras*} ∪ {*significados lógicos*} ∪ {*limitadores*}. A los textos distinguidos más importantes pertenecen los *programas*.

En los lenguajes naturales la totalidad de las expresiones y textos distinguidos suele tener límites vagos. Cuanto más formalizado está el lenguaje, tanto más nítidamente están contorneados estos límites.

Las reglas de formación de las expresiones y textos distinguidos constituyen la *sintaxis* del lenguaje.

Las reglas de su confrontación con la realidad conciernen a *la semántica* del mismo.

La descripción de la sintaxis y semántica se realiza por medio del *metalenguaje*. En la mayoría de los casos eso es un fragmento del argot matemático nacional. En nuestro libro este concepto no se formaliza; la mayor parte del texto que sigue a continuación es metalingüística.

1.2. Determinadas clases de razonamientos (matemáticos) o procesos de cálculo que se llevan a cabo con la ayuda de autómatas (abstractos) son la «realidad» para los lenguajes de las matemáticas. En consonancia con tal o cual destinación, estos lenguajes se dividen en formales y algorítmicos. (Compárense, en los lenguajes naturales, la contraposición del modo indicativo e imperativo o, al nivel de textos, la comunicación y el orden).

Los distintos lenguajes formales difieren entre sí, en primer lugar, por la amplitud con que se engloban los tipos de razonamientos a fomalizar o sea, por *la expresividad*; en segundo lugar, por la orientación hacia teorías matemáticas concretas; en tercer lugar, por la selección de los medios de expresión elementales (de los cuales se sintetizan luego los demás) y la formalización.

En este capítulo se examina sistemáticamente cierta clase de lenguajes formales. Los lenguajes algorítmicos se utilizan episódicamente.

La contraposición lengua — habla que se remonta hasta Humboldt y Saussure — es real tanto para los lenguajes formales como para los naturales.

En el § 3 de este capítulo se brindan ejemplos del «habla» de dos lenguajes concretos orientados hacia la teoría de conjuntos y la aritmética, respectivamente: los hábitos de la actividad de hablar deberán anteceder al estudio de la gramática.

El lenguaje de la teoría de conjuntos pertenece al número de los más ricos en medios expresivos a pesar de su extremado carácter económico. En principio, valiéndose del mismo se puede escribir un texto formal que responde casi a cualquier fragmento de las matemáticas contemporáneas: al curso de topología, análisis funcional, álgebra o lógica.

El lenguaje de la aritmética es uno de los más pobres, pero sus posibilidades expresivas son suficientes para describir toda la aritmética elemental, así como para mostrar los efectos de la autodescripción según Gödel y Tarski.

1.3. Como medio de comunicación, descubrimiento y fijación del material, ningún lenguaje formal es capaz de competir con la mezcla de argot matemático nacional y de fórmulas, habitual para cada matemático trabajador.

No obstante, debido a su rígida normalización, los textos formales por sí mismos pueden servir de objeto de investigación matemática. Los resultados de tal investigación son los *teoremas de las matemáticas*. Estos despiertan un gran interés (y fuertes emociones) siendo interpretados extensamente, o sea, como *teoremas de las mate-*

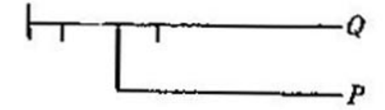
máticas. Y precisamente la posibilidad de tales y aun más extensas interpretaciones determina el significado filosófico y humanitario general de la lógica matemática.

1.4. Hemos convenido que las expresiones y los textos del lenguaje son elementos de ciertos conjuntos abstractos. Para trabajar con ellos han de ser fijados materialmente. Según la tradición europea contemporánea (a diferencia de la antigua tradición babilónica o la moderna tradición americana que utiliza la memoria del ordenador) ha sido adoptada la siguiente forma de inscripción. Los elementos del alfabeto se denotan en el papel por determinados símbolos (letras de distintos caracteres, cifras, signos adicionales, así como sus combinaciones). La expresión en el alfabeto A se escribe en forma de una sucesión de símbolos que se lee de izquierda a derecha, con separaciones en casos necesarios. Los textos se escriben como una sucesión de expresiones con blancos o signos de puntuación entre ellos.

1.5. La escritura de la mayor parte de las expresiones y textos interesantes del lenguaje formal o es demasiado larga físicamente, o se descifra y se recuerda psicológicamente con dificultad en el tiempo aceptable, o lo uno y lo otro a la vez. Por eso tales expresiones se sustituyen por *inscripciones abreviadas* (que físicamente pueden resultar más largas). La expresión $xxxxxx$ puede escribirse abreviadamente «$x \ldots x$ (seis veces)» o «x^6»; la expresión $\forall z \ (z \in x \leftrightarrow x \in y)$ puede escribirse como «$x = y$», y la expresión 101010...10, como «la sucesión de la longitud $2n$ con unidades en los lugares impares y ceros en los pares» o como «la escritura binaria del número $\frac{2}{3}(4^n - 1)$». La inscripción abreviada puede servir también de notación de cualquier expre-

sión de tipo determinado y no sólo de una expresión individual: esas son las llamadas «variables metalingüísticas».

Desde la época de Viète, Descartes y Leibnitz, hasta la cual se remonta nuestra tradición, la escritura abreviada sirve de inagotable fuente de inspiración y errores. La sistematización de sus procedimientos no tiene ni sentido ni es posible, ya que en esto se estamparon indeleblemente la moda, el espíritu del tiempo y la maestría o el pedantismo de los autores. Los símbolos $\sum$, $\int$, $\in$ son muestras clásicas para la imitación. La inscripción olvidada de Frege para «P y Q» (en realidad «*no* (*si* P, *entonces no* Q)», donde proviene la asimetría):



muestra lo que se debe evitar.

Sea como sea, las inscripciones abreviadas colman las matemáticas. La costumbre a la trinidad desmembrada:

texto formal

escritura del texto —— *interpretación del texto,*

que sustituye la identificación inconsciente del enunciado con su forma y sentido, deberá ser asimilada por el lector una de las primeras.

2. Lenguajes de primer orden

En este párrafo se describe la clase más importante de lenguajes formales $\mathcal{L}_1$, *lenguajes de primer orden*, y dos representantes concretos de esta

clase: el lenguaje de la teoría de conjuntos de Zermelo—Fraenkel L_1Set y el de la aritmética de Peano L_1Ar. Otra denominación de $\mathscr{L}_1$ es *lenguajes de predicados.*

2.1. El alfabeto de cualquier lenguaje de la clase $\mathscr{L}_1$ se divide en seis subconjuntos disjuntos dos a dos. En la tabla que viene a continuación

Alfabeto de las lenguas

Subconjuntos del alfabeto	Notaciones y denominaciones		
	generales	en L_1 Set	en L_1 Ar
Conectivas y cuantificadores	$\leftrightarrow$ (equivale); $\rightarrow$ (se deduce); $\vee$ (o inseparable); $\wedge$ (Y); $\neg$ (No); $\forall$ (cuantificador universal); $\exists$ (cuantificador existencial)		
Variables	x, y, z, u, v, ... con índices		
Constantes	c ... (con índices)	$\varnothing$ (conjunto vacío)	$\bar{0}$ (cero) $\bar{1}$ (unidad)
Operaciones de los rangos 1, 2, 3, ...	f, g, ... (con índices)	no hay	$+$ (adición) rango 2 $\cdot$ (multiplicación) rango 2
Relaciones (predicados) de los rangos 1, 2, 3, ...	p, q, ... (con índices)	$\in$ (ser elemento, rango 2) $=$ (igualdad, rango 2)	$=$ (igualdad), rango 2
Paréntesis	((paréntesis abridor);) (paréntesis cerrador)		

se enumeran las denominaciones específicas de los elementos de dichos subconjuntos, sus notaciones estandarizadas en el caso general, las notaciones especiales adoptadas en este libro para los lenguajes L_1 Set y L_1 Ar. En pos de ello describimos las reglas de formación de las expresiones distinguidas y en breve discutimos a semántica.

Las expresiones distinguidas de cualquier lenguaje L de la clase $\mathcal{L}_1$ se dividen en dos tipos: *términos* y *fórmulas*. Tanto unos como otros se definen recursivamente. Los textos distinguidos, *deducciones*, van definidos en el § 4 del cap. II.

2.2. Definición. *El conjunto de términos es el subconjunto de expresiones mínimo del lenguaje que satisface dos condiciones:*

a) *las variables y constantes son términos (elementales);*

b) *si f es una operación del rango r, y $t_1, \ldots, t_r$* son *términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_r)$ es un término.*

En la condición a) se identifica el elemento con la sucesión de la longitud 1. La coma no integra el alfabeto, ya que es un atributo de la escritura abreviada $f(t_1, \ldots, t_3)$ y significa lo mismo que $f(t_1t_2t_3)$. En el § 1 del cap. II se explica, cómo se descifran unívocamente las sucesiones de los términos a pesar de la ausencia del signo separador.

Si dos conjuntos de expresiones del lenguaje satisfacen las condiciones a) y b), entonces las satisfará también su intersección. Por eso es correcta la definición del conjunto de términos.

2.3. Definición. *Las fórmulas son el subconjunto de expresiones mínimo del lenguaje que satisface dos condiciones:*

a) *si p es una relación del rango r,* y *$t_1, \ldots, t_r$ son términos, entonces $p(t_1, \ldots, t_r)$ es una fórmula (elemental);*

b) *si P, Q son fórmulas* (¡escritura abreviada!), *x es una variable, entonces son fórmulas las expresiones* $(P) \leftrightarrow (Q)$, $(P) \rightarrow (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \wedge \wedge (Q)$, $\urcorner (P)$, $\forall x (P)$, $\exists x (P)$.

De las definiciones se deduce que cualquier término se obtiene de los términos elementales por el número finito de pasos, cada uno de los cuales consiste en «aplicar el símbolo de la operación» a los términos obtenidos anteriormente. Esto es justo también para las fórmulas. En el § 1 del cap. II precisaremos esta observación.

Las interpretaciones primitivas de los términos y fórmulas que vienen a continuación se brindan para referencia y conciernen a los tal llamados «modelos estandarizados» (véanse las definiciones precisas en el § 2 del capítulo II).

2.4. Ejemplos e interpretaciones. a) Los términos sirven de denominaciones (notaciones) de los objetos de la teoría. Los términos elementales son denominaciones de objetos indefinidos (variables) o concretos (constantes). El término $f(t_1, \ldots, t_r)$ es una notación del objeto obtenido después de que la operación denotada por f fue aplicada a los objetos denotados por $t_1, \ldots, t_r$. He aquí unos ejemplos de L_1Ar:

$\bar{0}$ es la notación del cero;

$\bar{1}$, la notación de la unidad;

$+(\bar{1}\bar{1})$, la notación del dos ($1 + 1 = 2$ en la inscripción corriente);

$+(\bar{1} + (\bar{1}\bar{1}))$, la notación del tres;

$\cdot(+(\bar{1}\bar{1}) + (\bar{1}\bar{1}))$, la notación del cuatro (¡$2 \times 2 = 4$!).

Como esta escritura normalizada diverge de la adoptada en la aritmética, escribiremos habitualmente en L_1 Ar $t_1 + t_2$ en vez de $+(t_1t_2)$ y $t_1 \cdot t_2$ en vez de $\cdot(t_1t_2)$. Este acuerdo puede considerarse como una formalidad inmediata de la escritura abreviada:

x es la notación de la indeterminación de un número entero,

$x + \bar{1}$ ó $+(x\bar{1})$, la notación del número que le sigue. En el lenguaje L_1 Set todos los términos son elementales:

x es la notación de un conjunto indefinido;

$\varnothing$, la notación de un conjunto vacío.

b) Las fórmulas sirven para denotar los enunciados (opiniones, proposiciones...) de la teoría. El enunciado traducido al lenguaje informal, puede resultar cierto, falso o indefinido (si éste concierne a los objetos indefinidos): véanse las definiciones exactas en el cap. II.

La fórmula elemental $p(t_1, \ldots, t_r)$ en el caso general tiene aproximadamente el siguiente sentido: «un número ordenado de r objetos denotados por $t_1, \ldots, t_r$ posee una propiedad denotada por p». He aquí algunos ejemplos de fórmulas elementales en L_1 Ar. Su estructura general $= (t_1 t_2)$ o, en una escritura no normalizada, $t_1 = t_2$ es

$$0 = \bar{1},\ \neg (\bar{0} = \bar{1}),\ x + \bar{1} = y.$$

Ejemplos de fórmulas no elementales:

$$(x = \bar{0}) \leftrightarrow (x + \bar{1} = \bar{1}).$$

$$\forall x ((x = \bar{0}) \vee (\neg (x \cdot x = \bar{0}))).$$

Las fórmulas elementales en L_1 Set: $y \in x$ (y es un elemento de x), $y = x$, $x = \varnothing$, así como $\varnothing \in y$, $x \in \varnothing$, etc. Desde luego, una escritura normalizada debería tener el aspecto de $\in (xy)$, etc.

Algunas fórmulas no elementales:

$\exists x (\forall y (\neg (y \in x)))$: existe un x tal que ningún y no es su elemento. Informalmente ello significa que «existe un conjunto vacío». No obstante, una vez más hacemos recordar que la

interpretación informal sobreentiende una cierta interpretación estandarizada, la cual explícitamente será introducida en el cap. II.

$\forall y\ (y \in z \to y \in x)$: z es el subconjunto de x.

Eso es un ejemplo de un procedimiento muy usado de escritura abreviada: en la fórmula a la izquierda, fueron omitidos cuatro paréntesis. Exactamente no describiremos cuáles son los paréntesis que es permisible omitir: su restablecimiento deberá ser unívoco o definido por el contexto y no deberá exigir esfuerzos especiales.

Una vez más subrayamos que las escrituras abreviadas de las fórmulas son solamente sus signos materiales. Al elegir una escritura abreviada, se persiguen, en lo general, objetivos psicológicos: la rapidez de lectura (posiblemente en perjuicio a la monosemia formal), la ligereza de surgimiento de asociaciones útiles y la dificultad de surgimiento de asociaciones nocivas, la coincidencia de las costumbres del autor y del lector, etc.

En la teoría de los lenguajes formales las propias fórmulas, y no sus inscripciones, son los objetos matemáticos.

Degresión sobre los nombres

Ya hemos dicho repetidas veces que cierto objeto (símbolo en el papel, elemento del alfabeto como conjunto abstracto, etc.) es una inscripción, notación o denominación de otro objeto. El término común cómodo para tal relación es el nombre.

La letra x es el nombre de un cierto elemento del alfabeto; al entrar en la fórmula, este último se convertirá en el nombre de un conjunto o número; la inscripción $x \in y$ es el nombre de cierta expresión en el alfabeto A, la cual a su vez es el

nombre de cierta opinión sobre los conjuntos indefinidos, etc.

En la formalización verbal los nombres de los objetos a menudo se identifican con los propios objetos: nosotros decimos «la variable x», «la fórmula P», «el conjunto Z» lo que no siempre es exacto. El siguiente pasaje tomado del libro de Rosser «Lógica para matemáticos» [6] señala algunos obstáculos:

«...la esencia consiste en lo siguiente: si tenemos una afirmación del tipo «3 es mayor que 9/12» acerca del número racional 9/12 que contiene cierto nombre «9/12» de este numero racional, entonces podemos reemplazar dicho nombre por otro cualquiera del mismo número racional, por ejemplo, por «3/4». Pero cuando examinamos la afirmación del tipo «3 divide el denominador de 9/12» acerca de cierto nombre de cierto número racional, y nuestra afirmación contiene cierto nombre de este nombre, entonces dicho nombre del nombre puede ser sustituido por otro nombre del mismo nombre, pero, hablando en general, no se puede reemplazar por un nombre de otro nombre, aunque este otro nombre sea el nombre del mismo número racional».

Además, continúa Rosser, «la renuncia al escrupuloso examen de tales sutilezas rara vez conduce a la confusión en la lógica y aun más raramente en las matemáticas».

No obstante, estas sutilezas desempeñan un papel considerable en la filosofía y en la práctica de las matemáticas.

«La rosa huele a rosa, no importa como llamarla: rosa o de otra manera», esto es cierto, porque las rosas existen fuera de nosotros y huelen por sí mismas. Pero los espacios hilbertianos «existen», por lo visto, simplemente por el hecho de que hablamos de ellos, y la elección de la

palabra aquí no es cosa indiferente. El nombre «espacio» para el conjunto de clases que se integran con el cuadrado de funciones fue a la vez el código de toda una esfera de ideas intuitivas sobre los espacios «verdaderos». Este nombre organizaba el pensamiento y lo conducía en un sentido determinado.

Un nombre acertado es un puente entre el conocimiento científico y el buen sentido, entre la nueva experiencia y las antiguas costumbres. La base conceptual de cualquier ciencia está integrada por una red complicada de nombres de los objetos, nombres de las ideas y nombres de los nombres. Ella misma evoluciona y cambia su proyección sobre la realidad.

3. Escuela primaria de la traducción

3.1. Recordemos que las fórmulas de L_1 Set son nombres de los enunciados acerca de los conjuntos, mientras que las fórmulas de L_1 Ar son nombres de los enunciados acerca de los números naturales; en dichas expresiones entran los nombres de los conjuntos y números, posiblemente, indefinidos.

En este párrafo están reunidos los primeros modelos de la traducción bilateral «argot $\leftrightarrow$ lenguajes formales». Uno de los objetivos de esta exposición es demostrar cuan grandes son las posibilidades expresivas de L_1 Set y de L_1 Ar pese a la extremada escasez de los medios de expresión.

Al igual que en los lenguajes naturales, la traducción no puede ser prefijada por reglas rígidas, no es unívoca y es un proceso creador. Compárese la cuarteta de Hesse con su traducción en el epígrafo a este capítulo: el invariante más importante de la traducción es su sentido.

Antes de leer lo que sigue a continuación es necesario revisar el apéndice al cap. II «Universo de von Neumann». La semántica implícita de L_1 Set pertenece a ese universo y no a los conjuntos «cantorianos» arbitrarios. Una idea más completa sobre el sentido de las fórmulas se puede sacar del § 2 del cap. II.

Traducciones de L_1 Set — argot

3.2. $\forall x\,(\neg\,(x \in \varnothing))$: «para todos los (conjuntos) x no es cierto que x es un elemento de (del conjunto) $\varnothing$» ó que «$\varnothing$ es un conjunto vacío».

La segunda afirmación equivale a la primera solamente en el universo de von Neumann, donde los elementos de los conjuntos son solamente los propios conjuntos y no los números reales, es decir, las sillas o los átomos.

3.3. $\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y$: «si para todos los z es justo que z es un elemento de x, entonces, cuando y sólo cuando z es un elemento de y, es justo que x coincide con y y viceversa» o «el conjunto se define unívocamente por sus elementos».

En esta expresión están omitidos por lo menos seis paréntesis; las subfórmulas $z \in x$, $z \in y$, $x = y$ se dan en forma de una escritura no normalizada por las reglas de $\mathcal{L}_1$.

3.4. $\forall u \forall v \exists x \forall z\ (z \in x \longleftrightarrow (z = u \vee z = v))$: «para cualesquier dos conjuntos u, v existe un tercer conjunto x tal, que u, v son sus únicos elementos».

Este es uno de los axiomas de Zermelo — Fraenkel. El conjunto x se denomina «par de conjuntos u, v desordenado» y en el apéndice se designa por $\{u, v\}$.

3.5. $\forall y \forall z\ (((z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in x) \wedge (y \in x \rightarrow \rightarrow \neg\,(y \in y)))$: «el conjunto x está parcialmente

ordenado mediante la relación $\in$ entre sus elementos».

La condición $y \in x \to \neg (y \in y)$ la hemos transferido mecánicamente de la definición de la ordenación. En el universo de von Neumann esta condición ha sido cumplida automáticamente, ya que allí ningún conjunto es su propio elemento.

En calidad de ejercicio es útil escribir las fórmulas:

«x está bien ordenada por la relación $\in$»;

«x está linealmente ordenada por la relación $\in$»;

«x es un ordinal».

3.6. $\forall x\,(y \in z)$. La traducción palabra por palabra «para todos los x es justo que y es un elemento de z» suena un poco extraño. La fórmula $\forall x \exists x\,(y \in z)$ construida de acuerdo con las reglas, tiene un aspecto aún peor.

Se podría complicar algo las reglas e ilegitimar tales fórmulas, pero, en lo general, ellas no molestan en nada. En el cap. II nos cercioraremos de que, desde el punto de vista de la «autenticidad» o «demostrabilidad», las mismas resultarán equivalentes a la fórmula $y \in z$. Así se las debe entender.

Traducciones argot — L_1 Set

Elegiremos varias construcciones fundamentales de valor matemático general y mostraremos cómo éstas se realizan en el universo de von Neumann, en el cual no hay nada, salvo los conjuntos obtenidos por «recopilación» de $\varnothing$, y en el que cualesquiera relaciones deberán construirse a partir de $\in$.

3.7. *«x es un producto directo de $y \times z$.* Ello quiere decir que los elementos de x son los pares

ordenados de los elementos de y y z, respectivamente. La definición del par desordenado es evidente: la fórmula

$$\forall u\, (u \in x \leftrightarrow (u = y_1 \vee u = z_1))$$

«significa» o se escribe abreviadamente en forma de $x = \{y_1, z_1\}$ (compárese con el p. 3.4). El par ordenado y_1 y z_1 se introduce mediante el procedimiento de Kuratovski: éste es el conjunto x_1, cuyos elementos son los pares desordenados $\{y_1, y_1\}$ e $\{y_1, z_1\}$. De este modo llegamos a la fórmula

$$\exists y_2 \exists z_2\, (\text{“}x_1 = \{y_2, z_2\}\text{”} \wedge \text{“}y_2 = \{y_1, y_1\}\text{”} \wedge \\ \wedge \text{“}z_2 = \{y_1, z_1\}\text{”}),$$

la cual se escribirá abreviadamente en forma de

$$x_1 = \langle y_1, z_1 \rangle$$

y se leerá «x_1 es un par ordenado con el primer elemento y_1 y el segundo elemento z_1». En la fórmula, las inscripciones abreviadas de las subfórmulas están puestas entre comillas; ulteriormente dejaremos de hacerlo.

Definitivamente, el enunciado «$x = y \times z$» puede ser escrito en forma de

$$\forall x_1\, (x_1 \in x \leftrightarrow \exists y_1 \exists z_1\, (y_1 \in y \wedge z_1 \in z \wedge \\ \wedge \text{“}x_1 = \langle y_1, z_1 \rangle\text{”})).$$

Para recordarle al lector la última vez las libertades de la escritura escribiremos esa misma fórmula según todos los canones de $\mathcal{L}_1$:

$$\forall x_1\, ((\in (x_1 x)) \leftrightarrow (\exists y_1\, (\exists z_1\, (((\in (y_1 y)) \wedge \\ \wedge (\in (z_1 z))) \wedge (\exists y_2\, (\exists z_2\, (((\forall u\, ((\in u x_1)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow ((= (u y_2)) \vee (= (u z_2))))) \wedge (\forall u\, ((\in (u y_2)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (= (u y_1))))) \wedge (\mathrm{A}u\, ((\in (u z_2)) \leftrightarrow ((= (u y_1)) \vee \\ \vee (= (u z_1))))))))))))).$$

EJERCICIO: ¿dónde se ubica el paréntesis abridor par al paréntesis cerrador quinto desde el final?

En el § 1 del cap. II se indicará el algoritmo para resolver tales problemas.

3.8. *«f es una aplicación del conjunto u en el conjunto v».* Ante todo, las aplicaciones (o funciones) se identifican con sus gráficos: de lo contrario no se logra examinarlas como elementos del universo.

La fórmula siguiente le impone a f sucesivamente tres restricciones: f es un subconjunto de $u \times v$; la proyección de f sobre u coincide con todo el u; a cada elemento de u le responde exactamente un elemento de v:

$$\forall z\,(z \in f \to (\exists u_1 \exists v_1\,(u_1 \in u \wedge v_1 \in v \wedge \text{“}z = \langle u_1,\ v_1\rangle\text{”}))) \wedge \forall u_1\,(u_1 \in u \to \exists v_1 \exists z\,(v_1 \in v \wedge \text{“}z = \langle u_1,\ v_1\rangle\text{”} \wedge z \in f)) \wedge \forall u_1 \forall v_1 \forall v_2\,(\exists z_1 \exists z_2\,(z_1 \in f \wedge z_2 \in f \wedge \text{“}z_1 = \langle u_1,\ v_1\rangle\text{”} \wedge \text{“}z_2 = \langle u_1, v_2\rangle\text{”}) \to v_1 = v_2).$$

EJERCICIO: escríbase la fórmula «f es la proyección de $y \times z$ sobre z».

3.9. *«x es un conjunto finito».* La finitud no es un concepto primitivo, ni mucho menos. He aquí su definición según Dedekind: «no hay aplicación biunívoca f del conjunto x sobre su propio subconjunto».

Fórmula: $\neg \exists f\,(\text{“}f = \text{aplicación de } x \text{ en } x\text{”} \wedge \wedge\, \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2\,((\text{“}\langle u_1,\ v_1\rangle \in f\text{”} \wedge \text{“}\langle u_2 v_2\rangle \in f\text{”} \wedge \neg\neg\,(u_1 = u_2)) \to \neg\,(v_1 = v_2)) \wedge \exists u_1\,(u_1 \in x \wedge \wedge\, \neg\, \exists v_1\,(\text{“}\langle v_1,\ u_1\rangle \in f\text{”}))).$

La abreviatura “$\langle u_1, v_1\rangle \in f$” significa, naturalmente, $\exists y\,(\text{“}y = \langle u, v_1\rangle\text{”} \wedge y \in f)$.

3.10. *«x es un número entero no negativo».* En el universo de von Neumann los ordinales finitos

son los representantes de los números naturales, así que la fórmula necesaria puede tener tal aspecto:

«x está bien ordenado por la relación $\in$»$\wedge$ $\wedge$«x es finito».

Esta definición en seguida proporciona el orden natural de los números naturales.

EJERCICIO: piénsese cómo se han de escribir las fórmulas «$x + y = z$» «$xy = z$», donde x, y, z son números enteros $\geqslant 0$.

Después de ello se puede de modo corriente escribir las fórmulas «x es un número entero», «x es un número racional», «x es un número real» (según Cantor o Dedekind), etc., y construir luego la versión formal del análisis. Las inscripciones de la longitud aceptable se obtendrán solamente durante las extensiones periódicas del lenguaje L_1 Set (véase § 8 del cap. II). Por ejemplo, en L_1 Set es imposible escribir los términos-nombres de los números 1, 2, 3, . . . ($\varnothing$ es el nombre de 0), aunque se puede construir las fórmulas «x es el ordinal finito de 1 elemento», «x es el ordinal finito de 2 elementos», etc. Con tales métodos tortuosos de expresión, las identidades numéricas más simples tendrán una longitud increíble, pero, sin duda alguna, para la lógica es importante en principio la posibilidad de escribirlas.

3.11. *«x es un espacio topológico».* En la fórmula habrá que mencionar evidentemente la topología de x. Prefijémosla, digamos, mediante el conjunto y de todos los subconjuntos abiertos de x. Al principio escribamos que y consta de subconjuntos de x, contiene x y un subconjunto vacío:

$$P_1\colon \forall z\,(z \in y \rightarrow \forall u\,(u \in z \rightarrow u \in x)) \wedge$$
$$\wedge\, x \in y \wedge \varnothing \in y.$$

La intersección w de cualesquiera dos elementos u, v de y, es abierta, es decir, pertenece a y:

$$P_2: \forall u \forall v \forall w \, ((u \in y \wedge v \in y \wedge \forall z \, ((z \in u \wedge \wedge z \in v) \leftrightarrow z \in w)) \rightarrow w \in y).$$

Es más difícil escribir «la reunión de cualquier conjunto de subconjuntos abiertos es abierta». Escribamos primeramente:

P_3: $\forall u \, (u \in z \leftrightarrow \forall v \, (v \in u \rightarrow v \in y))$,

es decir, «z es un conjunto de todos los subconjuntos y». Luego,

$$P_4: \forall u \forall w \, ((u \in z \wedge \forall v_1 \, (v_1 \in w \leftrightarrow \exists v \, (v \in u \wedge \wedge v_1 \in v))) \rightarrow w \in y).$$

Esto significa (considerando P_3 que ha determinado z): «si u es cualquier subconjunto de y, es decir, un conjunto de subconjuntos abiertos de x, entonces la reunión w de todos estos subconjuntos abiertos pertenece a y, es decir, es abierta».

La fórmula definitiva puede tener tal aspecto:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \forall z \, (P_3 \rightarrow P_4).$$

Las siguientes observaciones a que se someterá esta fórmula serán reflejadas en las precisas definiciones de los § 1 y 2 del cap. II.

Las letras x, y en todas las P_i se utilizan en el mismo sentido, mientras que z desempeña distintos papeles: en P_1 es el subconjunto x, y en P_3 y P_4, el conjunto de los subconjuntos x. Nosotros podemos permitírnoslo porque z, tan pronto lo «enlacemos» con el cuantificador $\forall$, digamos, en P_1, deja de designar el conjunto individual aunque indefinido, e iba a ser y se convierte en una notación provisional de «cualquier conjunto». En cuanto la «zona del cuantificador $\forall$ haya

terminado z puede utilizarse en un nuevo significado de acción» A fin de «librar» z para su uso ulterior $\forall z$ ha sido colocado también antes de $P_3 \to P_4$.

Traducciones argot — L_1 Ar

3.12. "$x < y$": $\exists z\,(y = (x + z) + 1)$. Considérese que las variables son nombres de los números enteros no negativos (indefinidos).

3.13. "x es un divisor de y": $\exists z\,(y = x \cdot z)$.

3.14. "x es un número primo": "$\bar{1} < x$" $\wedge$ $\wedge$("y es divisor de x" $\to (y = \bar{1} \vee y = x)$).

3.15. «Gran teorema de Fermat»:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall u\,(``\bar{2} < u" \wedge ``x_1^u + x_2^u = x_3^u" \to \to ``x_1 x_2 x_3 = \bar{0}").$$

No está claro cómo escribir en L_1 Ar la fórmula $x_1^u + x_2^u = x_3^u$. Desde luego, para cada concreto $u = 1, 2, 3, \ldots$, en L_1 Ar hay una correspondiente fórmula elemental, pero ¿cómo hacer que u sea variable? Este no es un problema trivial. Sólo hace poco fue demostrado que se puede hallar tal fórmula elemental $p\,(x, u, y, z_1, \ldots, z_n)$, que la afirmación $\exists z_1 \ldots \exists z_n p\,(x, \ldots, z_n)$ en el dominio de los números naturales equivale a $y = x^u$. Después de ello $x_1^u + x_2^u = x_3^u$ se podrá traducir por lo menos así:

$$``x_1^u = y_1" \wedge ``x_2^u = y_2" \wedge ``x_3^u = y_3" \wedge y_1 + y_2 = y_3.$$

La existencia de tal p es un hecho teórico-numérico no trivial, así que la propia posibilidad de traducir se convierte aquí en un problema matemático.

3.16. **«Hipótesis de Riemann».** Para entender este ejemplo es necesaria cierta familiarización con la teoría analítica de los números.

La función-zeta de Riemann $\zeta\,(s)$, en el semiplano

Re $s > 1$, está determinada por la serie $\sum_{n=1} n^{-s}$. Ella se prolonga meromórficamente a todo el plano complejo de los valores s. La hipótesis de Riemann consiste en la afirmación de que los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran en la recta Re $s = 1/2$. Desde luego, en tal aspecto la hipótesis de Riemann no se traduce al lenguaje L_1Ar. Sin embargo, se conoce una serie de afirmaciones meramente aritméticas equivalentes de un modo demostrable a la hipótesis de Riemann. Las más sencillas se formulan, posiblemente, así.

Sea $\mu(n)$ la función de Möbius a base de números enteros $\geqslant 1$: ésta es igual a 0, si n se divide por el cuadrado y a $(-1)^r$, donde r es el número de los divisores simples de n, en el caso contrario.

Entonces tenemos

$$\text{Hipotesis de Riemann} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \forall y \Big(y > x \rightarrow \rightarrow \Big| \sum_{n=1}^{y} \mu(n) \Big| < y^{1/2+\varepsilon}\Big).$$

A la derecha no es entero solamente el índice de la potencia, pero se puede hacer que ε recorra solamente los números del tipo $1/z$, $z \geqslant 1$, donde z es un número entero, y elevar luego la desigualdad requerida a la potencia de $2z$. La fórmula $\Big(\sum_{n=1}^{y} \mu(n)\Big)^{2z} < y^{z+2}$ ya puede ser traducida al lenguaje L_1Ar, aunque no del todo trivial.

Hemos aducido los dos últimos ejemplos para demostrar cuan complejos pueden ser los problemas que se formulan en el lenguaje L_1 Ar a pesar de la aparente sencillez de sus medios expresivos y su semántica.

Para resumir este párrafo expondremos algunas observaciones acerca de los lenguajes de órdenes superiores.

3.17. Lenguajes de órdenes superiores. Supongamos que L es un lenguaje de primer orden. Sus medios expresivos en principio están delimitados en un aspecto importante: es imposible hablar sobre *las propiedades arbitrarias* de los objetos de la teoría, o sea, sobre *los subconjuntos*

arbitrarios del conjunto de todos los objetos. Sintácticamente esto se refleja en la prohibición de formular expresiones, digamos, de tipo $\forall p\,(p\,(x))$, donde p es la relación del rango 1. Las relaciones designan propiedades fijas y no variables.

Es cierto que algunas propiedades pueden ser expresadas con ayuda de fórmulas no elementales. Digamos, en L_1 Ar en vez de «x es par» se puede escribir $\exists y\,(x = (\bar{1} + \bar{1})\cdot y)$. No obstante, hay un continuo de subconjuntos de números enteros, pero en total existe un conjunto numerable de propiedades expresivas (§ 2 del cap. II), así que, notoriamente, no todas las propiedades pueden ser expresadas por fórmulas. Por lo tanto, la expresión prohibida $\forall p\,(p\,(x))$ no puede ser sustituida del todo por ninguna sucesión de expresiones $P_1\,(x)$, $P_2\,(x)$, $P_3\,(x)$, . . .

Los lenguajes, en los cuales se admiten cuantificadores según las propiedades y (o) las funciones (así como, posiblemente, según las propiedades de las propiedades, etc.), se denominan lenguajes de órdenes superiores. Uno de tales lenguajes, L_2 Real, lo examinaremos en el cap. III para ilustrar el método forcing de Cohen en una variante simplificada.

No obstante, una extensión semejante de las posibilidades expresivas puede ser alcanzada permaneciendo en la clase de lenguajes $\mathcal{L}_1$. En efecto, en el lenguaje L_1 Set se puede hablar de cualesquiera subconjuntos de cualesquiera conjuntos, es decir, de las propiedades, de las propiedades de las propiedades y de las propiedades de los sistemas de propiedades ... (con continuación transfinita) sin salir fuera de los límites del formalismo de primer orden. Además, cualquier lenguaje concreto orientado de orden

superior destinado a describir los conjuntos estructurados puede ser traducido al lenguaje L_1 Set, habiendo conservado el sentido y la veracidad en la interpretación normal. (Una exclusión perceptible serían los lenguajes para describir las clases de Gödel — Bernays y las «grandes» categorías, pero éstos parece que están condenados a mantenerse como lenguajes de primer orden según el nivel contemporáneo de comprensión de las paradojas).

El lector atento notará lo siguiente. En L_1 Set puede escribirse una fórmula, de la cual formaría parte el cuantificador $\forall$ de todos los subconjuntos de números enteros (ordinales finitos). Pero en L_1 Set *no se puede* escribir fórmulas que describan explícitamente muchos subconjuntos concretos, ya que hay un continuo de éstos, mientras que el total de fórmulas es una cantidad numerable. En el cap. II nos detendremos más detalladamente en dichos problemas al examinar la paradoja de Skolem.

Pues bien, en los lenguajes de primer orden (y sobre todo en el lenguaje L_1 Set) están engendrados casi todos los fundamentales principios lógicos de conjunto que se utilizan en el trabajo cotidiano del matemático. Por eso los mismos serán el objeto principal de estudio en este libro. Los lenguajes orientados concretos, no obstante, pueden ser formalizados de otra manera, con mayores o menores divergencias de las reglas de $\mathcal{L}_1$. Además de L_2 Real, en el cap. II analizaremos como ejemplos de tales lenguajes, el SELF (lenguaje de Smullyan para la autodescripción) y el S Ar, lenguaje de la aritmética, para el cual es cómodo demostrar el teorema de Tarski sobre la imposibilidad de expresar la veracidad.

1. El rasgo común más importante de la mayoría de los lenguajes artificales es la posibilidad de prefijar un espectro rico de medios de expresión con un número finito y no grande de principios generadores.

En cada caso concreto la elección de tales principios (incluso el alfabeto y la sintaxis) es resultado de un compromiso entre dos extremos.

La economía de los medios expresivos lleva a la unificación de la escritura y a la simplificación del análisis mecánico del texto. Sin embargo, la misma aleja los textos unos de otros en los lenguajes naturales y los alarga mucho.

El enriquecimiento de los medios expresivos aproxima los textos artificiales a los naturales, pero complica la sintaxis y el análisis formal. (Compárense los lenguajes de máquina con los de programación del tipo Algol, Fortran, Cobol, etc.). Aduciremos varios ejemplos a base de nuestro material.

2. Dialectos de $\mathcal{L}_1$. a) Sin cambiar la lógica engendrada en $\mathcal{L}_1$, podríamos pasar en el alfabeto sin los paréntesis y sin cualquiera de los dos cuantificadores, así como sustituir todas las conectivas por una $\downarrow$ (conjunción de las negaciones) (además, las constantes podrían ser declaradas como funciones de rango 0, y las funciones, reducidas a relaciones.

Esto se alcanza efectuando el cambio siguiente de las definiciones. Si $t_1, \ldots, t_r$ son términos, f es una operación del rango r y p es una relación del rango r, entonces $ft_1 \ldots t_r$ es un término y $pt_1 \ldots t_r$ es una fórmula elemental. Si P, Q son fórmulas, entonces $\downarrow PQ$, $\forall xP$ también son fórmulas. Por su contenido $\downarrow PQ$ significa "no P y no Q", así que en este dialecto tenemos las

siguientes expresiones:

$\neg (P): \downarrow PP, \quad (P) \wedge (Q): \downarrow\downarrow PP \downarrow QQ,$

$(P) \vee (Q): \downarrow\downarrow PQ \downarrow PQ.$

Se ve como la economía de paréntesis y conectivas lleva a la repetición múltiple de una misma fórmula. No obstante, las demostraciones de los teoremas de tal lenguaje pueden simplificarse a costa de la reducción de la lista de sus normas sintácticas.

b) El lenguaje de la teoría de conjuntos, según N. Bourbaki [5], contiene en el alfabeto los signos $\square$, τ, $\vee$, $\neg$, $=$, $\in$ y letras. No obstante, las expresiones en este lenguaje no son sucesiones sencillas de los signos del alfabeto, sino sucesiones en las cuales algunos elementos están reunidos en pares (mediante conectores diacríticos). Por ejemplo:

$$\tau \wedge \neg \in \square A' \in \square A'$$

La diferencia principal entre el lenguaje de Bourbaki y L_1 Set consiste en la presencia del "símbolo de elección de Hilbert". Si, digamos, $\in xy$ es la fórmula "x es un elemento de y", entonces $\tau \in \square y$ es un término, el cual significa "cierto elemento del conjunto y".

El lenguaje de Bourbaki no es muy cómodo y no adquirió propagación. Este lenguaje se hizo conocido en la literatura popular merced al ejemplo de la inscripción abreviada del término «unidad» aducida imprudentemente por los autores:

$\tau_z ((\exists u) (\exists U) (u = (U, \{\varnothing\}, Z) \wedge$

$\wedge\ U \subset \{\varnothing\} \times Z \wedge (\forall x) ((x \in \{\varnothing\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists y) ((x, y) \in U)) \Rightarrow (\forall x) (\forall y) (\forall y')$
$(((x, y) \in U \wedge (x, y') \in U) \Rightarrow (y=y')) \wedge$
$\wedge (\forall y) ((y \in Z) \Rightarrow (\exists x ((x, y) \in U)))).$

La inscripción total de este término contendría varias decenas de miles de signos; para la «unidad» eso tal vez es demasiado.

c) Una extensión muy grande de las posibilidades expresivas de casi cualquier lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$ sería el permiso de formar «términos de clase» del tipo $\{x \mid P(x)\}$ que designasen la «clase de todos los objetos de x que poseen la propiedad P». Esta idea ha sido aprovechada por Morse en el lenguaje de la teoría de conjuntos y por Šmullyan en el lenguaje de la aritmética (véase el § 10 del cap. II).

3. Observaciones generales. Para la mayoría de los lenguajes naturales y artificiales son características la discontinuidad y linealidad (carácter unidimensional).

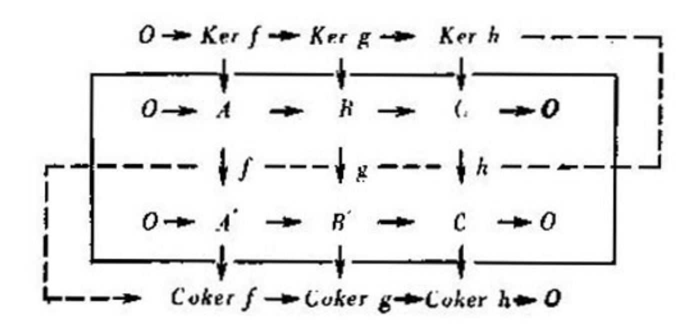
La percepción por el hombre del mundo exterior no se siente por nosotros ni de un modo discreto, ni de un modo lineal aunque estas características se observan al nivel de los mecanismos fisiológicos (codificación por impulsos en las redes neuronales). Sin embargo, los lenguajes de comunicación tienden al desenvolvimiento sucesivo de la información en una serie de signos elementales discernibles. Probablemente, la causa principal de esto sea el grado de univocidad y reproducción de la información el cual es mucho mayor (teóricamente es ilimitado) que el que puede ser alcanzado con otros métodos de transmisión de esa información (compárense las ventajas que tienen las calculadores digitales ante los analógicos lo cual se discute muy a menudo).

Pero el cerebro humano evidentemente utiliza

ambos principios. La percepción íntegra de las imágenes, así como las emociones están enlazadas más bien con los procesos no lineales y no discretos, posiblemente, de naturaleza ondulatoria. Desde este punto de vista es interesante analizar los fragmentos no lineales de los distintos lenguajes.

En las matemáticas a éstos concierne en primer lugar el uso de dibujos. No obstante, eso casi no se somete a la descripción formal a excepción de la teoría de grafos que se ha desprendido y formalizado. El grafo es un objeto muy popular, alejado mínimamente tanto de su imagen íntegra espacial como de su descripción según todas las reglas de la teoría de conjuntos. Cada vez que se logra enlazar el problema con el grafo, se simplifica considerablemente el análisis, y los grandes fragmentos de la descripción verbal se reemplazan por manipulaciones con figuras. Una clase de ejemplos menos conocida son los diagramas conmutativos y las sucesiones espectrales del álgebra homóloga. Una muestra típica es el «lema de la serpiente». He aquí su formulación exacta.

Supongamos que se da un diagrama conmutativo (encerrado en el marco) de grupos abelianos y de sus homomorfismos, en el cual los renglones son sucesiones exactas:



Entonces los núcleos y conúcleos de los homomorfismos «verticales» f, g, h entran a formar parte de la sucesión exacta de seis miembros, como se muestra en el dibujo, siendo conmutativo todo el diagrama de meras flechas. El morfismo «serpiente» $\mathrm{Ker}\, h \to \mathrm{Coker}\, f$, denotado por una flecha de trazos, es el objeto principal que se construye en el lema. Es fácil describir sucesimente el diagrama «con la serpiente» en un lenguaje lineal formal más o menos conveniente. Pero tal procedimiento exige una interrupción artificial y no unívoca de los enlaces de la figura bidimensional (al igual que durante la exploración de la imagen de televisión). Además, la falta de una imagen íntegra molesta reconocer la situación análoga en otras circunstancias y formalizarla en un bloque único.

La infancia del álgebra homológica iba acompañada de un discernimiento entusiasmado de las clases útiles de diagramas. Al principio el interés hacia ellas incluso fue exagerado.

Hay, probablemente, un ejemplo único de todo un libro una estructura bidimensional (de bloques) conscientemente introducida: C. Lindsey, S. van der Meulen «Introducción informal en el Algol-68» [23]. Dicho libro consta de 8 capítulos, cada uno de los cuales está dividido en 7 párrafos (¡y entre ellos, para observar el sistema, ocho están vacíos!). Supongamos que (i, j) es el nombre del párrafo j del capítulo i, entonces se podrá estudiar el libro «por las filas» de la matriz (i, j) o por sus «columnas», según el deseo del lector.

Al igual que todas las grandes empresas, esto es el fruto de la intención de resolver, por lo visto, un problema insoluble, pues, según la observación de los autores, es imposible describir el Algol-68 antes de que se haya descrito.

Capítulo II

Veracidad y deductividad

1. Lema de la lectura unívoca

El contenido principal de este párrafo son el lema 1.4 y las definiciones 1.5 y 1.6. El lema garantiza la univocidad del descifrado de los términos y fórmulas de cualquier lenguaje de la clase $\mathscr{L}_1$ y sirve de base a la mayoría de los razonamientos inductivos. El lector puede darle crédito si logró por sí mismo analizar la última fórmula del p. 3.7 del cap. I. Es importante recordar que la construcción de cualquier lenguaje formal comienza por la preocupación de que las reglas sintácticas no sean equívocas.

Comencemos por las definiciones combinatorias estándares para fijar la terminología.

1.1. Sea A un cierto conjunto. La aplicación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en A se denomina sucesión de la longitud n de elementos de A. La imagen i en esta aplicación se denomina i-ésimo termino de la suceción. Al valor $n = 0$ le corresponde una sucesión vacía. Las sucesiones de la longitud 1 de vez en cuando se identificarán con los elementos de A.

La sucesión de la longitud n se registra también en forma de $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$, donde a_i es su i-ésimo término. El número i se denomina número de orden del término a_i. Si $P = (a_1, \ldots, a_n)$, $Q = (b_1, \ldots, b_m)$ son dos su-

cesiones, entonces se llama su *unión PQ* la sucesión $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ de la longitud $m+n$, cuyo i-ésimo término es a_i para $i \leqslant n$, b_{i-n} para $n+1 \leqslant i \leqslant n+m$. De forma análoga se determina la unión de la sucesión finita de las sucesiones.

Se denomina *entrada* de la sucesión Q en P cualquier representación de P en forma de la unión P_1QP_2. Sustituir la sucesión R en vez de la entrada Q en P dada significa construir una sucesión P_1RP_2.

Supongamos que Π^+, Π^- son dos subconjuntos disjuntos en $\{1, \ldots, n\}$. La aplicación c: $\Pi^+ \to \Pi^-$ se denomina *biyección de paréntesis*, si es biyectiva y satisface las condiciones:

a) $c(i) > i$ para todos los $i \in \Pi^+$;

b) para cada i la condición $j \in [i, c(i)]$ equivale a $c(j) \in [i, c(i)]$.

1.2. Lema. *Para* Π^+, Π^- *dados, si existe una biyección de paréntesis, entonces es la única.*

Este lema se aplicará a las expresiones en los lenguajes de la clase $\mathcal{L}_1$: Π^+ son los números de los lugares en la expresión dada, en los cuales se encuentra el paréntesis abridor, Π^- son los números de los lugares, en los que se encuentra el paréntesis cerrador, la aplicación c confronta cada paréntesis abridor con el correspondiente cerrador.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función ε: $\{1, \ldots, n\} \to \{0, \pm 1\}$ adquiere el valor 1 en Π^+, -1 en Π^- y 0 en los demás lugares. Se afirma que entonces para cada $i \in \Pi^+$, cualquier biyección de paréntesis c: $\Pi^+ \to \Pi^-$ y cualquier k $(1 \leqslant k \leqslant c(i) - i)$ están cumplidas las correlaciones

$$\sum_{j=i}^{c(i)} \varepsilon(j) = 0, \qquad \sum_{j=i}^{c(i)-k} \varepsilon(j) > 0.$$

Después de demostrarlas, estableceremos un lema, ya que obtendremos una receta que unívocamente restituye c

según Π^+, Π^-: $c(i)$ es el mínimo $l > i$, para el cual $\sum_{j=i}^{l} \varepsilon(j) = 0$.

La primera correlación se deduce del hecho de que los elementos Π^+ y Π^- entran en el segmento $[i, c(i)]$ solamente por pares $(j, c(j))$ y $\varepsilon(j) + \varepsilon(c(j)) = 0$. Para demostrar la segunda correlación supongamos que para algunos i, k tenemos $\sum_{j=i}^{c(i)-k} \varepsilon(j) \leqslant 0$. Como $\varepsilon(i) = 1$, entonces $\sum_{j=i+1}^{c(i)-k} \varepsilon(j) < 0$. Así que, en el segmento $[i+1, c(i)-k]$, el número de elementos de Π^- es estrictamente mayor que el de Π^+. Supongamos que $c(j_0) \in \Pi^-$ es tal elemento en este segmento que $j_0 \notin [i+1, c(i)-k]$. Entonces $j_0 \leqslant i$, hasta $j_0 < i$, ya que $c(i)$ se encuentra fuera del referido segmento. Eso quiere decir que solamente un término del par j_0, $c(j_0)$ se encuentra en $[i, c(i)]$, lo que contradice la definición de c.

1.3. Supongamos ahora que A es un alfabeto de un cierto lenguaje L de la clase $\mathcal{L}_1$ (véase el § 2 del cap. I). Las sucesiones finitas de los elementos de A son expresiones de este lenguaje. Algunas expresiones fueron distinguidas como fórmulas o términos. Recordemos que de las definiciones del § 2 del cap. I, se deduce lo siguiente:

a) cualquier término del lenguaje L es ora una constante, ora una variable, ora se presenta en forma de $f(t_1, \ldots, t_r)$, donde f es una operación del rango r, y $t_1, \ldots, t_r$ son términos de menor longitud;

b) cualquier fórmula del lenguaje L se presenta ora en forma de $p(t_1, \ldots, t_r)$, donde p es una relación del rango r y $t_1, \ldots, t_r$ son términos de menor longitud, ora en una de las siete formas siguientes:

$(P) \leftrightarrow (Q)$, $(P) \rightarrow (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \wedge (Q)$, $\neg (P)$, $\forall x (P)$, $\exists x (P)$,

donde P, Q son fórmulas de menor longitud y x es una variable.

De aquí, mediante la inducción por la longitud, se obtiene tal resultado: *si la expresión E es un término o una fórmula, entonces entre el conjunto Π^+ de números de paréntesis abridores en él y el conjunto Π^- de números de paréntesis cerradores tiene lugar una biyección de paréntesis.*

En realidad, los nuevos paréntesis en el p. 1.3 a, b se hallan en la biyección natural, y los antiguos (ocultos en las inscripciones abreviadas de $t_1, \ldots, t_r, P, Q$) admiten tal biyección según la suposición inductiva. Además, los nuevos paréntesis no cortan los pares de los paréntesis antiguos.

Ahora podemos formular el resultado principal del párrafo.

1.4. Lema sobre la lectura unívoca. *Cada expresión del lenguaje* L *es ora un término, ora una fórmula, ora ni éste, ni aquélla.*

Estas alternativas, así como las citadas en el p. 1.3 *a, b, se excluyen mutuamente.*

Cada término (fórmula respectivamente) se representa exactamente en uno de los aspectos descritos en el p. 1.3 *a (en el p.* 1.3 *b respectivamente) y unívocamente.*

Además, en el curso de la demostración estableceremos que *si una cierta expresión es la unión de una sucesión de términos finita, entonces se representa unívocamente en tal aspecto.*

DEMOSTRACION: Procedamos por inducción a lo largo de la expresión y describamos informalmente el algoritmo del análisis sintático que aclara unívocamente cuál de las alternativas tiene lugar.

a) Si en la expresión E no hay paréntesis, entonces la misma es ora el término constante,

ora el término variable, ora no es ni término ni fórmula.

b) Si en la expresión E hay paréntesis, pero no existe biyección de paréntesis entre los paréntesis abridores y cerradores, entonces E no es ni término ni fórmula.

c) Supongamos que en E hay paréntesis entre los cuales existe una biyección de paréntesis. En este caso E ora se representa unívocamente en uno de los nueve aspectos:
$f(E_0)$ (f es una operación); $p(E_0)$ (p es una relación); $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$; $(E_1) \rightarrow (E_2)$; $(E_1) \vee (E_2)$; $(E_1) \wedge (E_2)$; $\neg (E_3)$; $\forall x (E_3)$; $\exists x (E_3)$,

ora no es ni término ni fórmula. Se sobreentiende que los pares de paréntesis escritos están enlazados por medio de la única biyección de paréntesis, existente, según se supone, en E: precisamente esto asegura la univocidad. En efecto, el aspecto $f(E_0)$ se obtiene si el primer elemento de la expresión es una operación, el segundo, un paréntesis (y el último, un paréntesis) par a éste, y solamente en este caso, etc.

Así pues, hemos reducido el problema al análisis sintáctico de las expresiones de menor longitud E_0, E_1, E_2, E_3. Esto casi termina la descripción del algoritmo, porque respecto de E_1, E_2, E_3 es necesario aclarar, si dichas expresiones son fórmulas. Sin embargo, respecto de E_0 es necesario aclarar, si esta expresión es una unión de términos en el número debido y si esta representación es unívoca.

La respuesta es positiva. La siguiente receta permite separar sucesivamente de la parte izquierda, términos de la unión de términos.

d) Supongamos que E_0 es cierta expresión entre cuyos paréntesis hay una biyección de

paréntesis. Si existe la representación E_0 en forma de tE'_0, donde t es un término, entonces dicha representación es unívoca.

En efecto, ora E_0 se representa unívocamente en una de las formas:

$$xE'_0, \quad cE'_0, \quad f\,(E''_0)\,E'_0$$

(x es una variable, c es una constante y f es una operación; los paréntesis están enlazados con la única biyección de paréntesis en E_0), ora en general no se representa en forma de tE'_0, donde t es un término.

En los casos de $E = xE'_0$ ó cE'_0 esto, por lo visto, es el único método de separar el término por la izquierda. En el caso de $E_0 = f\,(E''_0)\,E'_0$ el problema se reduce al análisis de si E''_0 es una unión de términos en cantidad de *rango* f. La inducción a lo largo de E_0 permite suponer, que la respuesta ora es negativa ora positiva, entonces E''_0 se descompone unívocamente en la unión de términos. El lema está demostrado.

EJERCICIO: formúlese y demuéstrese el le ma de la lectura unívoca para el dialecto «sin paréntesis» de $\mathcal{L}_1$ descrito en el cap. I «Digresión sobre la sintaxis», p. 2a.

He aquí los primeros razonamientos inductivos que describen la contraposición de las entradas libres y conexas de la variable en los términos y fórmulas. La corrección de las definiciones que vienen a continuación la asegura el lema 1.4.

1.5. Definición. a) *Toda entrada de una variable en una fórmula elemental o en un término es libre.*

b) *Toda entrada de una variable en* $\neg\,(P)$ *o en* $(P_1) * (P_2)$ ($*$ *es cualquier conectiva) es libre (correspondientemente conexa) exactamente cuando es libre (correspondientemente conexa) la entrada respectiva en* P, P_1 *o* P_2.

c) *Toda entrada de la variable x en $\forall x(P)$ y $\exists x(P)$ es conexa. Las entradas de las demás variables en $\forall x(P)$ y $\exists x(P)$ son análogas a las entradas respectivas en P.*

Supongamos que se da la entrada del cuantificador $\forall$ (o $\exists$) en la fórmula P. De las definiciones se deduce que en pos del mismo en P entran la variable y el paréntesis abridor. La expresión que comienza por esta variable y termina con el paréntesis cerrador respectivo se denomina *dominio de acción* (de la entrada) del cuantificador dado.

1.6. Definición. *Supongamos que se dan la fórmula P, la entrada libre de la variable x en P y el término t. Decimos que la entrada dada de x no enlaza t en P, si no se encuentra en el dominio de acción de ningún cuantificador del tipo $\exists y$ o $\forall y$, donde y es una variable que integra t.*

Con otras palabras, después de sustituir dicha entrada x por t, todas las variables que integran t quedan libres en P.

En la mayoría de los casos cada una de las entradas libres de una variable dada ha de sustituirse por un término. Es importante que tal operación traduce términos en términos y fórmulas en fórmulas (inducción según la longitud). Si cada entrada libre de x en P no enlaza t, diremos simplemente que x no enlaza t en P.

1.7. El trabajo con las deficiniciones 1.5 y 1.6 comenzará en el párrafo siguiente. Aquí nos limitaremos a algunas explicaciones intuitivas.

La definición 1.5 permite introducir una clase importante de fórmulas *cerradas*. Según la definición, éstas son fórmulas sin variables libres (se denominan también opiniones). El sentido intuitivo del concepto de la fórmula cerrada es tal. Dicho concepto responde a un enunciado

completamente determinado (en particularidad, respecto de la veracidad o falsedad): los nombres de los objetos indefinidos de la teoría se utilizan solamente en el contexto «todos los objetos de x satisfacen la condición...» o «existe un objeto y con la propiedad...». Y al revés, una fórmula no cerrada $x \in y$ o $\exists x (x \in y)$ puede ser verdadera o falsa, según cuáles conjuntos se nombran x, y (para la primera); y (para la segunda). La veracidad o falsedad aquí se entienden para la interpretación fija del lenguaje, como será especificado en el § 2.

La definición 1.6 establece, en particular, las reglas de higiene al cambiar las notaciones. Si en la fórmula dada queremos denominar el objeto indefinido x con otro nombre y, es necesario preocuparse obligatoriamente de que x no figure entre aquellas partes de la fórmula, donde este nombre y ya ha sido aprovechado como notación de un objeto indefinido *arbitrario* bajo el signo de cuantificador. Con otras palabras, x no debe enlazar. Además, si queremos decir que x fue obtenido por medio de ciertas operaciones de otros objetos indefinidos ($x =$ término de $y_1, \ldots, y_n$), entonces los nombres $y_1, \ldots, y_n$ no deberán ser enlazados.

He aquí un paralelo próximo a estas reglas del lenguaje de análisis: en vez de $\int_1^x f(y)\,dy$ se puede tranquilamente escribir $\int_1^x f(z)\,dz$, pero no se debe escribir $\int_1^x f(x)\,dx$: la variable x está enlazada "en el dominio de acción del signo $f(\ )\,d(\ )$".

2. Interpretación; veracidad; poder expresivo

2.1. Supongamos que se ha prefijado un lenguaje L de la clase $\mathscr{L}_1$ y un cierto conjunto (o clase) M. Prefijar la *interpretación* del lenguaje L en M significa indicar el modo de atribuirles sentido a las fórmulas de L como enunciados acerca de los elementos de M.

Más exactamente, la interpretación φ del lenguaje L en M consta de un juego de aplicaciones que ponen en correspondencia a los términos y fórmulas del lenguaje los elementos de M o las estructuras sobre M (en el sentido de Bourbaki). Dichas aplicaciones se dividen en *primarias* que son precisamente las que determinan la interpretación, y *secundarias* que, de manera natural y unívoca, se restablecen por las primarias. A esas mismas aplicaciones y a veces sus significados, también los llamaremos interpretaciones.

Pasemos a las definiciones sistemáticas. A los elementos del alfabeto L los llamaremos de vez en cuando *símbolos*. La notación de la interpretación φ, según el contexto, la incluiremos en las notaciones de las aplicaciones relacionadas con ésta o la omitiremos.

2.2. Aplicaciones primarias. a) La interpretación de constantes es la aplicación del conjunto de sus símbolos (del alfabeto L) en M la cual pone $\varphi(c) \in M$ en correspondencia al símbolo c.

b) La interpretación de operaciones es la aplicación del conjunto de sus símbolos (del alfabeto L), la cual pone a cada símbolo f del rango r en correspondencia la función $\varphi(f)$ sobre $M \times \ldots \times M = M^r$ con los valores en M

c) La interpretación de relaciones es la aplicación del conjunto de sus símbolos de relaciones (del alfabeto L), la cual pone a cada símbolo p

del rango r en correspondencia el subconjunto $\varphi(p) \subseteq M^r$.

Aplicaciones secundarias. Nosotros queremos interpretar intuitivamente las variables como nombres de un «elemento común» del conjunto M, a las cuales se les pueden atribuir valores concretos de M. Queremos interpretar el término $f(x_1, \ldots, x_r)$ como una función $\varphi(f)$ de r argumentos que recorren los valores de M, etc.

Para brindar una definición exacta, introduciremos la *clase de interpretación* $\overline{M}$:

$\overline{M}$ = clase de todas las aplicaciones en M del conjunto de símbolos de las variables en el alfabeto L.

De este modo, cada punto $\xi \in \overline{M}$ pone a cualquier variable x en correspondencia su valor $\varphi(x)(\xi) \in M$, el cual, con más frecuencia, denotaremos simplemente por $x\xi$.

Esto permite considerar las variables como *funciones sobre* $\overline{M}$ *con valores en* M. En forma más general:

2.3. La interpretación de los términos es una confrontación de cada término t de la función $\varphi(t)$ sobre $\overline{M}$ con los valores en M. Ella se determina por inducción mediante los acuerdos siguientes:

a) si c es una constante, entonces $\varphi(c)$ es una función constante con un valor definido por la aplicación primaria;

b) si x es una variable, entonces $\varphi(x)$ es $\varphi(x)(\xi)$ como función de ξ;

c) si $t = f(t_1, \ldots, t_r)$, entonces para todos los $\xi \in \overline{M}$

$$\varphi(t)(\xi) = \varphi(f)(\varphi(t_1)(\xi), \ldots, \varphi(t_n)(\xi)),$$

donde $\varphi(t_i)(\xi)$ están determinadas según la suposición inductiva, y $\varphi(f)$: $M^r \to M$ están prefijadas por la aplicación primaria.

En vez de $\varphi(t)(\xi)$, para abreviar, escribiremos a veces t^{ξ}.

2.4. Interpretación de las fórmulas elementales. A toda fórmula P del lenguaje L, al interpretar φ, se le atribuye su *función de veracidad* $|P|_{\varphi}$. Esta es una función en la clase de interpretación $\overline{M}$, que adquiere solamente los valores de 0 ("falsedad") y de 1 ("verdad"). Para las fórmulas elementales dicha función se determina así:

$$|p(t_1, \ldots, t_r)|_{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ si } \langle t_1^{\xi}, \ldots, t_r^{\xi}\rangle \in \varphi(p), \\ 0, \text{ si no.} \end{cases}$$

El enunciado p sobre los nombres de $t_1, \ldots$ $\ldots, t_r$ objetos de M intuitivamente se convierte en verdadero, cuando los objetos nombrados $t_1, \ldots, t_r$ satisfacen la relación, cuyo nombre es ese enunciado.

2.5. Interpretación de la fórmula. En las fórmulas no elementales la función de veracidad se determina inductivamente por las correlaciones siguientes (para abreviar, se han omitido los paréntesis y referencia a φ y ξ):

$$|P \leftrightarrow Q| = |P|\,|Q| + (1 - |P|)(1 - |Q|):$$

$P \leftrightarrow Q$ es cierta, cuando ambas P y Q son ciertas o cuando ambas P y Q son falsas;

$$|P \rightarrow Q| = 1 - |P| + |P|\,|Q|:$$

$P \rightarrow Q$ es falsa sólo cuando P es cierta y Q es falsa;

$$|P \vee Q| = \text{máx}\,(|P|, |Q|):$$

$P \vee Q$ es falsa sólo cuando ambas P y Q son falsas;

$$|P \wedge Q| = \text{mín}\,(|P|, |Q|):$$

$P \wedge Q$ es cierta sólo cuando ambas P y Q son ciertas;

$|\neg P| = 1 - |P|$:

$\neg P$ es falsa sólo cuando P es cierta.

Por último, al introducir los cuantificadores sucede lo siguiente. Supongamos que $\xi \in \bar{M}$ y x es cierta variable. Denominemos *variación de* ξ *por* x a cualquier punto $\xi' \in \bar{M}$ para el cual $y^{\xi} = y^{\xi'}$, si y es cualquier variable diferente de x. Entonces

$$|\forall x P|(\xi) = \min_{\xi'} |P|(\xi'); \quad |\exists x P|(\xi) = \max_{\xi'} |P|(\xi'),$$

donde ξ' recorre todas las variaciones de ξ por x.

La corrección de las definiciones 2.3—2.5 se asegura por el lema de lectura unívoca.

Denominaremos *φ-cierta* a la fórmula P, si $|P|_{\varphi}(\xi) = 1$ para todos los $\xi \in \bar{M}$. La interpretación de φ (o M) se denomina *modelo* del conjunto de fórmulas ε, si todos los elementos de ε son φ-ciertos.

2.6. Ejemplo: interpretación estándar de L_1Ar. Esta es una interpretación en el conjunto N de números no negativos enteros para la cual $\bar{0}$, $\bar{1}$ se interpretan como 0, 1, respectivamente; $+$, $\cdot$, $=$, como adición, multiplicación e igualdad, respectivamente.

2.7. Ejemplo: interpretación estándar de L_1 Set. Esta es una interpretación en el universo de von Neumann V (véase el apéndice al cap. 2), para la cual $\varnothing$ se interpreta como un conjunto vacío, $\in$ como relación «ser elemento de», $=$ como igualdad.

Todos los ejemplos de traducción en el cap. I concernían a estas interpretaciones estándares. El enlace de las muestras de traducción con las

definiciones actuales es el siguiente. Supongamos que $\Pi(x, y, z)$ es un enunciado en argot acerca de los conjuntos indefinidos x, y, z de V; $P(x, y, z)$ es la traducción Π en el lenguaje L_1 Set. Entonces para cada punto ξ, que interpreta x, y, z como los nombres de los conjuntos x^ξ, y^ξ, z^ξ del universo de von Neumann, tenemos:

$$\Pi(x^\xi, y^\xi, z^\xi) \text{ es cierta} \Leftrightarrow |P(x, y, z)|(\xi) = 1.$$

De este modo, cada fórmula expresa cierta propiedad de los objetos del conjunto de interpretación:

2.8. Definición. *El conjunto* $S \subseteq M^r$, $r \geqslant 1$, *se llama* φ*-expresable (por la fórmula* P *en el lenguaje* L *con respecto a la interpretación de* φ), *si existen tales variables* $x_1, \ldots, x_r$ *que*

$$|P|_\varphi(\xi) = 1 \Leftrightarrow \langle x_1^\xi, \ldots, x_r^\xi\rangle \in S.$$

La penetración en la estructura de los conjuntos:

de fórmulas φ*-ciertas en el lenguaje* L;

de conjuntos φ*-expresables en* $\bigcup_{r\geqslant 1} M^r$

pertenece al número de problemas más importantes sobre los lenguajes formales.

2.9. Ejemplo. Los conjuntos que se expresan por medio de L_1 Ar con respecto a la interpretación estándar son la clase mínima de conjuntos en $\bigcup_{r\geqslant 1} N^r$, la cual

a) contiene todos los conjuntos del tipo

$$\{\langle k_1, \ldots, k_r\rangle \mid F(k_1, \ldots, k_r) = 0\} \subseteq N^r,$$

donde F recorre los polinomios con coeficientes enteros;

b) está cerrada con respecto a las intersecciones, reuniones y complementos finitos (en su N^r);

c) está cerrada con respecto a las proyecciones $\overline{pr}_i$: $N^r \to N^{r-1}$ (se supone que el número de variables del lenguaje es infinito):

$$\overline{pr}_i \langle k_1, \ldots, k_r \rangle = \langle k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_r \rangle.$$

En efecto, los conjuntos del tipo a) se expresan por las fórmulas elementales $t_1^F = t_2^F$, donde t_1^F es un término que responde a la suma de todos los monomios F con coeficientes positivos, y t_2^F, con negativos.

Luego, si $S_1, S_2 \in N^r$ pueden ser expresados por las fórmulas P_1, P_2 con variables libres iguales, entonces $S_1 \cap S_2$ puede ser expresado por $P_1 \wedge P_2$; $S_1 \cup S_2$, por $P_1 \vee P_2$; N^r/S_1, por la fórmula $\neg P_1$. Por último, el conjunto $\overline{pr}_i (S_1)$ puede expresarse por la fórmula $\exists x_1 (P_1)$.

Las conectivas $\to$, $\leftrightarrow$ y el cuantificador $\forall$ no brindan nada nuevo puesto que, sin cambiar el conjunto a expresar, pueden sustituirse por una combinación de operaciones lógicas ya examinadas: $\forall x$ sobre $\neg \exists x \neg$, etc.

Esto es solamente la descripción inicial de los conjuntos *aritméticos*, o sea, de los conjuntos L_1 Ar-expresables. En la misma no se puede ver directamente el poder expresivo de muchos conjuntos concretos, por ejemplo, conjunto de los números primos en N (véase el ejemplo 3.14 del cap. I), conjunto de los cocientes incompletos al descomponer $\sqrt[3]{2}$ en una fracción continua o conjunto de pares $\{\langle i$, i-ésima cifra en la descomposición decimal de $\pi \rangle\} \subset N^2$.

No obstante, como lo mostraremos en el § 11, «los números de las fórmulas verdaderas de la aritmética» forman un conjunto aún mucho más complejo, y este conjunto es inexpresable.

Aduciremos ahora algunos resultados técnicos simples.

2.10. Proposición. *Sea P una fórmula en el lenguaje* L, siendo φ *su intepretación en* M, ξ, $\xi' \in M$. *Supongamos que para todas las variables* x *que tienen entradas libres en* P, x^{ξ} *coincide con* $x^{\xi'}$. *Entonces* $|P|_{\varphi}(\xi) = |P|_{\varphi}(\xi')$.

2.11. Corolario. *Las fórmulas cerradas P en cualquier interpretación están determinadas con respecto a la veracidad:* $|P|_{\varphi}(\xi)$ *no depende de* ξ.

DEMOSTRACIÓN. a) Supongamos que t es cierto término y que para cualquier variable x que integra t tene- $x^{\xi} = x\xi'$. Entonces el lema 1.4 y la inducción a lo largo de t proporcionan $t^{\xi} = t\xi'$.

b) La afirmación 2.10 es justa para las fórmulas P elementales del tipo $p(t_1, \ldots, t_r)$. En efecto,

$$|P|(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \langle t_1^{\xi}, \ldots, t_1^{\xi'} \rangle \in \varphi(p), \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

y de forma análoga para $|P|(\xi')$. Pero si ξ y ξ' coinciden en todas las variables que integran P (obligatoriamente de manera libre), entonces tanto más coinciden en todas las variables que integran t_i, y según la condición a) tenemos $t_i^{\xi} = t_i^{\xi'}$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces, $|P|(\xi) = |P|(\xi')$.

c) Procedemos ahora por inducción según el número total de conectivas y cuantificadores en P. Si P tiene un aspecto de $\neg Q$ ó $Q_1 * Q_2$, entonces es trivial la deducción 2.10 para P de 2.10 para Q, Q_1, Q_2.

Supongamos que P ahora tiene un aspecto $\forall x\,(Q)$ y que 2.10 es justa para Q (el caso de $\exists x\,(Q)$ se analizá análogamente o se reduce a $\forall x$ sustituyendo $\exists x$ por $\neg\forall x\neg$).

Según la definición, tenemos

$$|\forall x Q|(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |Q|(\eta) = 1 \text{ para todas las } \eta, \\ & \quad \text{variaciones de } \xi \text{ por } x, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

$$|\forall x Q|(\xi') = \begin{cases} 1, \text{ si } |Q|(\eta') = 1 \text{ para todas las } \eta', \text{ variaciones de } \xi' \text{ por } x, \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Permitamos cambiar también η y η' en las partes derechas de estas igualdades según todas las variables que no entran libremente en Q. Las afirmaciones después de la palabra «si» quedarán ciertas o falsas en este dominio de valores más amplio, si han sido ciertas o falsas anteriormente según la suposición inductiva para Q. Pero en este caso η y η' recorrerán dominios de valores iguales, ya que ξ y ξ' difieren precisamente por las variables que no entran libremente en Q, y además por x.

La proposición queda demostrada.

El hecho siguiente, casi evidente, se basa en muchos fenómenos que atestiguan la no adecuación de los lenguajes formales respecto a las representaciones intuitivas (véase a continuación la «Paradoja de Skolem»):

2.12. Proposición. *Potencia. La potencia de la clase de conjuntos φ-expresables no supera* $\aleph_0$ + card ({constantes} $\cup$ {operaciones} $\cup$ {relaciones} L) (card significa potencia).

DEMOSTRACIÓN. Si en el lenguaje hay $\leqslant \aleph_0$ variables, entonces el mismo contiene no más de $\aleph_0$ + card ({constantes} $\cup$ {operaciones} $\cup$ {relaciones}) fórmulas. Pero si el conjunto de variables es innumerable, entonces cada conjunto que ha de ser expresado puede expresarse por medio de una fórmula, cuyas variables integran el subconjunto de variables numerable fijado una vez y para siempre.

2.13. Corolario. *Si M es infinito y* card ({constantes} $\cup$ {operaciones} $\cup$ {relaciones}) $>< 2^{\text{card } M}$, *entonces "casi todos" los conjuntos son inexpresables.*

De este modo, el único método de expresar todos los subconjuntos M es tomar una gran cantidad de nombres constantes en el lenguaje.

Para los lenguajes que reflejan los razonamientos matemáticos reales ésta es una receta irreal. En realidad, cualquier juego de medios de expresión que se describe finitamente brinda la posibilidad de expresar solamente un número de conjuntos numerables. Sin embargo, técnicamente suele ser cómodo incluir en el alfabeto del lenguaje, digamos, los nombres de todos los elementos de M.

En los párrafos siguientes comenzamos a estudiar sistemáticamente los conjuntos de las fórmulas verdaderas.

3. Propiedades sintácticas de la veracidad

Supongamos que L es un lenguaje de la clase $\mathscr{L}_1$, φ es su interpretación y T_φL es un conjunto de fórmulas φ-ciertas. En este párrafo enumeraremos las propiedades de T_φL que reflejan la lógica introducida en los lenguajes $\mathscr{L}_1$ independientemente de las particularidades concretas de la interpretación φ.

3.1. *El conjunto T_φL es completo*. Según la definición esto significa que para cada fórmula P cerrada, ora P, ora $\neg P$ se encuentra en T_φL.

Esto se deduce de la afirmación 2.11.

3.2. *El conjunto T_φL no contiene contradicción*, es decir, para ninguna fórmula P puede ser que P y $\neg P$ se encuentren en T_φL.

En efecto, $T_\varphi\mathrm{L} = \{P \mid |P|_\varphi = 1\}$, y $|\neg P|_\varphi = 1 - |P|_\varphi$.

3.3. *El conjunto T_φL está cerrado con respecto al empleo de las reglas de deducción* MP (Modus Ponens) y de Gen (Generalización).

Según la definición esto significa que si P y $P \to Q$ se encuentran en T_φL, entonces Q también se encuentra en T_φL; si P se encuentra en T_φL, entonces $\forall xP$ para cualquier variable x

se encuentra en T_φL. La verificación es casi evidente: si $| P |_\varphi = 1$ y $| P \to Q |_\varphi = 1$, entonces obligatoriamente $| Q |_\varphi = 1$; si $| P |_\varphi(\xi) = 1$ para todas las ξ, entonces también $| \forall xP |_\varphi (\xi) = 1$.

La fórmula Q se denomina *corolario directo de las fórmulas* P, $P \to Q$ según la regla de MP.

La fórmula $\forall xP$ se denomina *corolario directo de la fórmula P según la regla de deducción de* Gen.

El sentido intuitivo de las reglas de deducción es el siguiente. La regla de MP responde al razonamiento elemental del tipo: Si es justa P y es justo que de la justeza de P se deduce la justeza de Q, entonces es justa Q. De este modo, se puede decir que la semántica de la expresión «si..., entonces» de los lenguajes naturales se distribuye entre la semántica de la conectiva $\to$ y la regla de deducción de MP en los lenguajes de la clase $\mathscr{L}_1$.

Esto a menudo no se tiene en cuenta y lleva a malentendidos al explicar las reglas de atribución de veracidad a la fórmula $P \to Q$.

La regla de Gen corresponde a la práctica de escritura de una identidad o de afirmaciones universalmente justas en las matemáticas. Cuando escribimos $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ o «en el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de cuadrados de los catetos», se omiten los cuantificadores $\forall a \forall b$, $\forall$ (triángulo). Su restablecimiento no cambia la veracidad, pero libera las notaciones conexas.

3.4. *El conjunto* T_φL *contiene todas las tautologías*. Para determinarlas introduciremos primeramente el concepto de *polinomio lógico* sobre el conjunto de fórmulas ε: éste es un elemento del conjunto mínimo de fórmulas que contiene ε y que, por medio de conectivas lógicas,

está cerrado con respecto a la estructura de las fórmulas.

La sucesión de las fórmulas $P_1, \ldots, P_n$ y las representaciones de cada una de las fórmulas P_i en forma de $\neg Q$ o $Q_1 * Q_2$, donde Q, Q_1, Q_2 se encuentran en $\varepsilon \cup \{P_1, \ldots, P_{i-1}\}$, se denomina *representación de P_n* en forma de un polinomio lógico sobre ε. La representación de P_n se determina no obligatoriamente de manera unívoca: por ejemplo, si $\varepsilon = \{P, Q, P \to Q\}$, entonces $P \to Q$ tiene dos representaciones.

Sea $| \ |: \varepsilon \to \{0, 1\}$ una aplicación cualquiera. Si está prefijada la representación r de la fórmula P_n en forma de un polinomio lógico sobre ε, se puede determinar recursivamente $| P_n |_r$ con respecto a dicha representación valiéndose de las fórmulas del p. 2.5.

La formula P se denomina tautología si existe tal conjunto de fórmulas ε y tal representación de P en forma de un polinomio lógico sobre ε, que $| P |_r = 1$ para cualesquiera aplicaciones $| \ |: \varepsilon \to \{0, 1\}$.

El carácter tautológico es discernido efectivamente, ya que el análisis sintáctico de P permite enumerar todas las representaciones de P como un polinomio lógico.

La pertenencia de las tautologías a T_φL es evidente.

He aquí los primeros ejemplos de las tautologías:

A.0. $P \to P$,

A.1. $P \to (Q \to P)$,

A.2. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A.3. $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$,

B.1. $\neg\neg P \to P$, $P \to \neg\neg P$,

B.2. $\neg P \to (P \to Q)$.

Aquí P, Q, R son cualesquiera fórmulas de L; el aspecto de las mismas señala aquella repre-

sentación de las tautologías en forma de un polinomio lógico sobre $\{P, Q, R\}$, la cual se tiene en cuenta.

Las tautologías son razonamientos ciertos, independientemente de la veracidad o falsedad de sus propias partes integrantes. La verificación del carácter tautológico requiere una elección bastante acertada de estas partes.

B.1 es la ley del tercer excluido: una doble negación equivale a una afirmación.

B.2 es un mecanismo, mediante el cual la contradicción en cierto conjunto de fórmulas ε del lenguaje L lleva a la deductividad de cualquier fórmula y con ello destruye todo el sistema (véase a continuación la proposición 4.2). Demostremos tres variantes de verificación del carácter tautológico de la fórmula simple A.1.

VARIANTE A. Según las fórmulas del p. 2.5 tenemos

$$|P \to (Q \to P)| = 1 - |P| + |P|\,|Q \to P| =$$
$$= 1 - |P| + |P|\,(1 - |Q| + |P|\,|Q|) = 1,$$

porque $|P|^2 = |P|$.

VARIANTE B. Tabulemos $|P \to (Q \to P)|$ dependiendo de $|P|$, $|Q|$:

$\|P\|$	$\|Q\|$	$\|P \to Q\|$	$\|P \to (Q \to P)\|$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Esta es una muestra de las "tablas de veracidad".

VARIANTE C. La propiedad principal de la conectiva $\to$ consiste en que $P \to Q$ es falsa sólo, cuando P es cierta y Q, falsa. Si $P \to$

$\to (Q \to P)$ resultase falsa, P sería cierta y $Q \to P$, falsa de donde, Q, a su vez, es cierta y P, falsa, lo que es una contradicción.

Al lector se le recomienda comprobar el carácter tautológico de las fórmulas más complejas (digamos, de A.2) y decidir, cuál variante le gusta más.

3.5. *El conjunto* T_φL *contiene "axiomas lógicos con cuantificadores"*, es decir, fórmulas

a) $\forall x (P \to Q) \to (P \to \forall xQ)$, si todas las entradas de x en P son conexas;

b) $\forall x \neg P \leftrightarrow \neg \exists xP$;

c) $\forall xP(x) \to P(t)$, si x no enlaza el término t en P (*axioma de especialización*). Aquí $P(t)$ significa el resultado de sustitución de todas las entradas libres de x en P por t.

En lo demás las fórmulas P, Q son arbitrarias.

La verificación de la φ-veracidad de las fórmulas 3.5 la realizaremos en el p. 3.7. Su sentido intuitivo es más o menos claro. El axioma de especialización, por ejemplo, significa que si $P(x)$ es justa para todas las x, es justa también $P(t)$, donde t es la denominación de cualquier objeto. La condición de que x no enlace t, es una regla higiénica al cambiar las notaciones.

El conjunto

AxL = {tautologías L} $\cup$ {axiomas con cuantificadores}

se denomina *conjunto de axiomas lógicos del lenguaje* L.

Para abreviar, denominaremos *gödeliano* a cualquier conjunto de fórmulas ε del lenguaje L, *el cual es completo, no contiene contradicción, está cerrado con respecto al empleo de las reglas de deducción de* MP *y* Gen *y contiene todos los axiomas lógicos del lenguaje.* Fijemos el resultado principal de la discusión:

3.6. Proposición *El conjunto de fórmulas verdaderas del lenguaje (en la interpretación dada) es gödeliano.*

En el § 6 demostraremos que también, al revés, cualquier conjunto gödeliano es un conjunto de fórmulas verdaderas en la interpretación conveniente. De este modo, el carácter gödeliano es una aproximación máxima a la veracidad, la cual puede ser alcanzada «independientemente del sentido».

3.7. *Verificación de la veracidad de los axiomas* 3.5. a) Sea R la fórmula 3.5a. Supongamos que $|R|(\xi) = 0$ para cierto $\xi \in \bar{M}$ y llegaremos a la contradicción.

En realidad, en este caso $|\forall x (P \to Q)|(\xi) = 1$ y $|P \to \forall x Q|(\xi) = 0$. De la segunda igualdad se deduce que $|P|(\xi) = 1$ y $|\forall x Q|(\xi) = 0$. Sea ξ' tal variación de ξ por x que $|Q|(\xi') = 0$.. En este caso $|P|(\xi') = |P|(\xi) = 1$ en virtud de la proposición 2.10, ya que x no entra libremente en P. Entonces, $|P \to Q|(\xi') = 0$, pero esto contradice a lo que $|\forall x (P \to Q)|(\xi) = 1$.

b) Para todos los $\xi \in \bar{M}$ y variaciones de ξ' del punto ξ por x tenemos

$$|\forall x \neg P|(\xi) = \max_{\xi'} |\neg P(\xi') = 1 = 1 - \min_{\xi'} |P|(\xi'),$$

$$|\neg \exists x P(\xi) = 1 - \min_{\xi'} |P|(\xi').$$

Esto quiere decir que los valores de la veracidad $\forall x \neg P$ y $\neg \exists x P$ coinciden, y por eso $\forall x \neg P \leftrightarrow \neg \exists x P$ es idénticamente verdadera.

c) Sea $|\forall x P(x) \to P(t)|(\xi) = 0$ para cierto punto $\xi \in \bar{M}$. Deduciremos de aquí la contradicción. En realidad, en este caso

$$|\forall x P(x)|(\xi) = 1; \quad |P(t)|(\xi) = 0.$$

De la primera igualdad se deduce que $|P(x)|(\xi') = 1$ para todas las ξ' variaciones de ξ por x.

Tomaremos en calidad de ξ' tal variación, para la cual $x^{\xi'} = t^{\xi}$. Si demostramos que $|P(t)|(\xi) = |P(x)|(\xi')$, obtendremos la contradicción deseada.

Estableceremos este resultado por inducción según el número total de conectivas y cuantificadores en P.

c_1) Sea P una fórmula elemental $p(t_1, \ldots, t_n)$. Sucesivamente hallamos, denotando por $\overline{t_i}$ el resultado de la sustitución de t en vez de todas las entradas de x en t_i:

$t^{\xi} = x^{\xi'}$ (según la definición de ξ');

$\overline{t_i}^{\xi} = t_i^{\xi'}$ (por inducción a lo largo de t_i)

c_2) Sea $P \neg Q$ ó $Q_1 \ast Q_2$, donde $\ast$ es una conectiva. Como x, según la suposición, no enlaza t en P, lo mismo es justo para Q, Q_1, Q_2 y el paso inductivo se realiza automáticamente.

c_3) Sea, por último, P $\exists yQ$ o $\forall yQ$. Analicemos el primer caso; el segundo se analiza de forma análoga.

SUBCASO 1. $y = x$. Entonces x está enlazada en P; por eso $P(x) = P(t)$ y $|P|(\xi) = |P|(\xi')$ en virtud de la proposición 2.4.

SUBCASO 2. $y \neq x$. La suposición inductiva tiene el aspecto: $|Q(t)|(\eta) = |Q(x)|(\eta')$, *si* η' *es tal variación de* η *por* x *que* $x^{\eta'} = t^{\eta}$, *donde* η *es cualquier punto de* $\overline{M}$.

Es necesario demostrar la coincidencia de los dos siguientes valores de veracidad (donde ξ, ξ' están definidas como más arriba):

$$|\exists yQ(x)|(\xi') = \begin{cases} 1, \text{ si } |Q(x)|(\eta') = 1 \text{ para cierta } \eta', \\ \qquad \text{variación de } \xi' \text{ por } y, \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

$$|\exists yQ(t)|(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ si } |Q(t)|(\eta) = 1 \text{ para una cierta } \eta, \\ \qquad \text{variación de } \xi \text{ por } y, \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Recordemos además que ξ' es tal variación de ξ por x que $x^{\xi'} = t^{\xi}$.

Supongamos primeramente que el segundo valor de veracidad es igual a 1. Elijamos $\eta \in \overline{M}$ de modo que $|Q(t)|(\eta) = 1$ y construyamos tal variación η' del punto η por x que $x^{\eta'} = t^{\eta}$. Entonces, según la suposición inductiva $1 = |Q(t)|(\eta) = |Q(x)|(\eta')$. Mostremos que η' es una variación de ξ' por y; de aquí se deducirá que el primer valor de veracidad también es igual a 1. En realidad, η' se obtuvo variando η por x; η, variando ξ por y, y ξ, variando ξ' por x. Entonces, η' es una variación de ξ' por x e y; es necesario verificar que no se ha producido en realidad ninguna variación por $x: x^{\eta'} = x^{\xi'}$.

En verdad, la parte izquierda es t^{η} según la definición de η', y la parte derecha es t^{ξ} según la definición de ξ', pero η se obtuvo variando ξ por y, e y no entra en t, porque x no enlaza t en $P = \exists yQ$.

Queda probar que si el segundo valor de veracidad es igual a 0, lo es también el primero. Los razonamientos son casi idénticos. Si el segundo valor de veracidad es igual a 0, entonces $| Q(t) | (\eta) = 0$ para todas las η-variaciones de ξ por y. Por cada tal η construiremos η' al igual que en la primera parte de la demostración. Al igual que más arriba se prueba que η' es la variación de ξ' por y, y además, recorre todas estas variaciones cuando η recorre todas las variaciones de ξ por y. Esto quiere decir que también el primer valor de veracidad es igual a 0.

La proposición queda demostrada.

Digresión sobre la lógica natural

1. El objeto de la lógica no es el mundo exterior, sino sus sistemas de comprensión. La lógica de uno de tales sistemas —de las matemáticas— debido a su normalización representa una especie de plantilla rígida, la cual puede ser aplicada sobre cualquier otro sistema. La coincidencia o divergencia de esta plantilla con el sistema, sin embargo, no sirve de criterio de su aptitud o su valor. El físico no está obligado a ser consecuente ni contradictorio, él debe describir con eficacia la naturaleza en niveles determinados. Tanto menos lógicos son los lenguajes naturales y el funcionamiento directo de la consciencia. En general, la lógica como condición de la eficacia aparece solamente en las esferas muy especializadas de la actividad humana.

Sin tener fuerza normativa la comparación de la lógica de predicados con la de los lenguajes naturales o sus subsistemas puede resultar interesante y sentenciosa. A continuación se dan los datos seleccionados de la lingüística y psicología.

2. B. Russell, K. Döhmann, Reichenbach, U. Weinreich y muchos otros se ocupaban revelando en los lenguajes naturales las categorías, formalizadas en los lenguajes de la clase $\mathscr{L}_1$, y catalogando los métodos de su transmisión.

Esto lleva a la repartición de la palabras entre las llamadas *clases lógico-semánticas* en vez de la división tradicional en verbos, nombres, artículos, etc. (A. V. Gladki, I. A. Melchuk [24, § 6]).

Por ejemplo, las palabras *dormir*, *inteligente* y *llorón* son paralelas a los símbolos de las relaciones (predicados) del rango 1, las palabras *amar*, *agradable* y *hermana* son relaciones del rango 2. A éstas les responden las fórmulas elementales «*N* duerme», «*X* es agradable a *Y*», etc.

Todos, *entonces* y *algo* son palabras cuantificadoras, *y*, *o*, *pero*, *si... entonces* son, naturalmente, conectivas.

«The nose, le cadeau» son constantes «*esta nariz, este regalo*». El efecto de constancia se alcanza utilizando la semántica del artículo determinado. En la lengua rusa «nariz y regalo» son más bien variables para designar los objetos que satisfacen el predicado monoplaza «ser una nariz» y «ser un regalo». Por otra parte, puede haber otras interpretaciones.

El pronombre «*él*», sin duda alguna, es una variable. Los pronombres *yo* y *tú* tienen una semántica mucho más compleja, correlacionándose con la persona parlante, la cual no está expresada en los lenguajes impersonales de $\mathscr{L}_1$. Algunos de los aspectos del pronombre de la primera persona están incluidos en la semántica de los lenguajes algorítmicos. La «clave de la memoria» de tipo necesario en el programa para IBM-360 le abre al programa la posibilidad de cambiar el contenido de algún byte en el bloque de la memoria principal. La protección de la memoria pre-

gunta: «¿Quién es?» y el programa contesta: «Soy yo». Por último, ya en los lenguajes de $\mathscr{L}_1$ se logra simular algunos efectos de la autodescripción (véanse los §§ 9—11 y la digresión subsiguiente sobre la autorreferencia).

«*O*» en la lengua rusa expresa no sólo la $\vee$ lógica, sino también la rigurosa disyunción e incluso, según la sensación de los lingüistas, a veces la conjunción $\wedge$, por ejemplo en la frase «$x^2 > 0$ para $x < 0$ o para $x > 0$» (E. V. Padúcheva). En el latín, las funciones de la «o» disyuntiva y no disyuntiva se expresan con diversas palabras: aut, vel. «Y» puede expresar una sucesión temporal: compárese la frase «Jane se casó y dio a luz» con «Jane dio a luz y se casó» (S. Kleene).

La conjunción lógica $\wedge$ en los distintos lenguajes puede ser expresada:

por coposición: ma mo (chino) —caballo y asno; shika kitabu usome (suahili)—toma el libro (y) lee;

por la preposición: Pedro con María;

por la conjunción: и, and, et;

por la partícula postpositiva: que (lat.) —senatus populusque— senado y pueblo;

por la conjunción apareada: tanto ... como.

K. Döhmann catalogó los métodos de expresión de 16 polinomios lógicos de dos variables en muchos lenguajes del mundo.

3. A pesar de que el material recogido es muy curioso, se lo debe interpretar críticamente: los matices del uso a menudo desaparecen al compararlos con la lógica. Como ejemplo, analicemos la semántica natural de la conectiva «si... entonces».

Ya hemos señalado que en los lenguajes de $\mathscr{L}_1$ a la misma le corresponde no sólo «$\rightarrow$», sino también la regla de deducción MP. Además,

MP es un representante más adecuado para «si...entonces».

En efecto, la regla de atribución de veracidad a cualquier proposición implicativa con premisa notoriamente falsa casi no tiene paralelas en la lógica natural. Los ejemplos del tipo «si la nieve es negra, entonces $2 \times 2 = 5$» que pasan de un manual a otro pueden sólo desorientar, ya que las expresiones con tal semántica no se realizan en ningún sibsistema de lenguaje natural. Como exclusión pueden servir las fórmulas poéticas y expresivas con una esfera de uso muy limitada («si Ella es infiel, es mentiroso todo el mundo»). Las matemáticas formales en las cuales una contradicción destruye todo el sistema, sin duda alguna, tiene rasgos de carácter hiperexpresivo.

Por último, en la lógica de predicados no está reflejado totalmente el aspecto modal del empleo de «si...entonces» en las prescripciones tipo «si esto sucede, entonces actúe así». En cambio, este aspecto está bien expresado en la semántica de la conectiva «if...then...else...» en los lenguajes algorítmicos del tipo Algol. Las tentativas de simular la modalidad en los lenguajes construidos según la muestra de $\mathcal{L}_1$ y sin considerar la experiencia de los lenguajes algorítmicos conduce a fracasos evidentes (compárese A. A. Ivin [25]).

4. Se ha señalado reiteradamente que la elección de medios primitivos de expresión en la lógica de predicados no refleja la realidad psicológica. Las operaciones lógicas elementales y las conclusiones de un paso requieren un intelecto muy entrenado; al contrario, incluso con una consciencia perjudicada pueden efectuarse acciones lógicamente complejas como si fueron actos íntegros casi elementales.

«El subteniente Zasetski de 23 años, el 2 de marzo de 1943 recibió una herida penetrante de

bala en la zona occipitoparietal izquierda del cráneo. Dicha herida ... fue complicada por un proceso inflamatorio que provocó a su vez un proceso aglutinante en las meninges encefálicas, así como modificaciones evidentes en los tejidos que rodean la sustancia cerebral».

El catedrático A. R. Luria se encontró con Zasetski a fines de mayo de 1943 y controló su estado de salud durante 26 años. En el transcurso de este tiempo Zasetski escribió cerca de 3000 páginas, describiendo con trabajo atormentador su vida y enfermedad, luchando por el restablecimiento de la razón. Sus cuadernos, según cuyos materiales A. R. Luria creó su libro «Mundo perdido y recuperado» [26], no es sólo un testimonio de alta hombría, sino también un documento de gran fuerza de expresión.

Los trastornos de la mentalidad de Zasetski al principio eran horribles. Por encima de todo dominaba la *asemasia*: rupturas de los enlaces entre el signo y su significado.

Primer encuentro de Zasetski con el médico: «¡Trate de leer esta página «—» ... No ¿qué es esto? ... no sé... no entiendo qué es esto... No ... ¿cuál es? ... —«Bueno ¡trate de contar algo sencillo, por ejemplo, sume siete y seis ...»— «Siete... seis... pués, cómo se lo...no, no puedo... no sé totalmente...».

Ha perdido la comprensión de los predicados más simples:

«¿Qué suele haber antes del invierno?»— «Antes del invierno... o después del invierno...verano...o algo...no. Eso no me sale...»—«¿Y antes de la primavera?»—«Antes de la primavera... ahora es primavera...pero antes...o después... ...ya me confundo... no... no me sale...».

Se trastorna la interpretación de los códigos formadores de la semántica de la sintaxis:

«A la escuela donde estudiaba Dunia, vino de la fábrica una obrera para hacer un informe». ¿Qué es esto? Pues ¿quién hizo el informe? ¿Dunia? ¿La obrera? ¿Y dónde estudiaba Dunia? ¿Y quién vino de la fábrica? ¿Y a dónde?

Eso es un ejemplo difícil (texto de A. R. Luria), pero he aquí lo que escribe Zasetski mismo: «Y además: «el elefante es mayor que la mosca» y «la mosca es mayor que el elefante»... Yo entendía solamente que la «mosca» es pequeña y que el «elefante» es grande, pero no podía orientarme en estas palabras y contestar a la pregunta, si la mosca es menor o mayor que el elefante. La desgracia principal consistía en que yo no podía entender, a qué se refería la palabra «menor» (o «mayor»): a la mosca o al elefante...».

Llama la atención la complejidad del texto del metalenguaje que describe los trastornos de lengua. La precisión del análisis de los trastornos parece incompatible con la gravedad de los trastornos que se analizan. Esto podría explicarse por el hecho de que el análisis es retrospectivo, pero he aquí la descripción en la actualidad, aún más profunda: «...De nuevo recuerdo los conceptos «la mosca es menor que el elefante» o «la mosca es mayor que el elefante». Empiezo a pensar en ellos, cómo se deben entender correctamente y cómo incorrectamente. Con la transposición de las palabras en estos conceptos cambia el sentido del concepto. Pero, a primera vista, a mí me parecen iguales, como si no cambiara nada al transponer las palabras. Y cuando uno piensa más, nota que con la transposición de las palabras cambia el sentido de dichas cuatro palabras (elefante, mosca, menor, mayor). Pero ni mi cerebro, ni mi memoria después de la herida incluso hasta ahora, no son capaces de abarcar momentáneamente a quién le pertenece

concernir la palabra menor (o mayor): al elefante o a la mosca. Hasta en estas cuatro palabras hay muchas transposiciones».

Esa conservación de capacidades psíquicas complejas al perder las «simples», se observa también en las muestras de imaginación creadora de Zasetski semejantes a los bosquejos literario-psicológicos: «Soy médico. Reconozco a un enfermo, estoy cordialmente preocupado por su estado, sufro por él con toda mi alma, pues ¿cómo no? es un hombre tal como todos, sólo que está muy enfermo, es necesario ayudarle. Pues, yo también podría caer enfermo, y alguien tendría que ayudarme a mí también, pero ahora es necesario ayudar a este enfermo. De otra manera no se puede. Y ahora soy otro médico. ¡Ah! ¡ya estoy harto de esos enfermos con sus quejas! No sé ¿por qué me he metido en esta medicina? No quiero hacer nada, no quiero ayudar a nadie. Verdad es que yo ayudo más a quienes también a mí me prestan ayuda alguna. Y no importa si muere algún enfermo, no es la primera vez que mueren y morirán».

Todo ello muestra la plena inconsistencia de la opinión de J. Rosser [6]: «Cuando la demostración está abierta y escrita en el lenguaje de la lógica simbólica, puede ser averiguada por cualquier imbécil (moron)».

La psiquis humana funciona con eficacia no al comprobar los textos formales ni mucho menos.

4. Deductividad

4.1. Definición. *Se denomina conclusión de la fórmula P a partir del conjunto de fórmulas* ε *(en el lenguaje L de la clase* $\mathcal{L}_1$*) la sucesión finita de fórmulas* $P_1, \ldots, P_n = P$ *con las propiedades*

siguientes: para cada $i = 1, \ldots, n$, por lo menos se cumple una de las alternativas:

a) $P_i \in \varepsilon_j$;

b) $\exists j < i$ *es tal que* P_i *se deduce directamente de* P_j *según* Gen;

c) $\exists j, k < i$ *son tales que* P_i *se deduce directamente de* P_j, P_k *según* MP.

Escribiremos brevemente $\varepsilon \vdash P$ en vez de «existe una conclusión P de ε». La conclusión P que va acompañada para cada $i \leqslant n$ de la precisa indicación a cuál de las alternativas a), b) o c) se refiere la fórmula P_i y cuáles son los números de i, j y k en los casos b) y c) se denomina descripción de la conclusión. Una conclusión puede tolerar diversas descripciones.

Con la mayor frecuencia se analizan las conclusiones de los conjuntos ε que contienen AxL: axiomas lógicos del lenguaje L. Los elementos adicionales de ε pueden ser fórmulas de L, cuya veracidad en la interpretación estándar se halla «adivinada» —éstas se denominan *axiomas especiales* de L. (Los ejemplos se darán a continuación, en los pp. 4.6—4.9.) Tales conclusiones se consideran como equivalentes formales de las *demostraciones matemáticas* (de la fórmula $P = P_n$ a partir de las premisas de ε). Para tal identificación existen los siguientes motivos:

a) Como se muestra en el p. 3.3, si $\varepsilon \subseteq T_\varphi \mathrm{L}$ para cierta interpretación de φ y $\varepsilon \vdash P$, entonces $P \in T_\varphi \mathrm{L}$: de fórmulas verdaderas se deducen solamente también verdaderas.

b) Se ha realizado un gran trabajo experimental para formalizar las demostraciones matemáticas, es decir, para reemplazarlas por conclusiones en los correspondientes lenguajes de la clase $\mathscr{L}_1$, particularmente, en L_1 Set. Ha sido constatado que para los inmensos fragmentos de las matemáticos, incluso los fundamentos

de la teoría de los números enteros y reales, la teoría de los conjuntos, etc., la formalización de las demostraciones en forma de conclusiones se logra dentro de los límites de $\mathcal{L}_1$. En la litera tura acerca de la lógica hay muchos materiales sobre este tema (véase, en particular, el libro de E. Mendelson [2]).

c) El teorema de Gödel acerca de la completitud de los medios lógicos de $\mathcal{L}_1$ (véase el § 6) muestra que todas las fórmulas, verdaderas juntamente con ε (en todas las interpretaciones), pueden ser deducidas de ε.

Véase el análisis ulterior en la «Digresión sobre la demostración».

Se examinan también conclusiones de los conjuntos ε de otro tipo. Por ejemplo, de ε pueden ser excluidos algunos axiomas lógicos, digamos, el «Principio del tercer excluido» (B. 1, p. 3.4) para la investigación formal de los principios intuicionistas. O puede incluirse en ε una fórmula supuestamente falsa para deducir de ε la contradicción reduciendo «al absurdo».

Mostraremos los aspectos formales de la contradicción:

4.2. Proposición. *Supongamos que ε contiene todas las tautologías del tipo B. 2, p. 3.4. Entonces son equivalentes las dos propiedades de ε siguientes:*

a) existe una fórmula P tal que $\varepsilon \vdash P$ y $\varepsilon \vdash \neg P$;

b) $\varepsilon \vdash Q$ *para cualquier fórmula* Q.
El conjunto ε con tales propiedades se denomina conjunto contradictorio.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que b) $\Rightarrow$ a). Al revés, si $\varepsilon \vdash P$ y $\varepsilon \vdash \neg P$, entonces, agregando a las descripciones de estas conclusiones la fórmula $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ que, según se supone, se encuentra en ε, y aplicando dos veces MP

(a ella y a $\neg P$; a $P \to Q$ y a P), obtenemos la descripción de la conclusión Q de ε.

4.3. Una gran parte de los teoremas de la lógica consiste en demostrar las afirmaciones del tipo "$\varepsilon \vdash P$" o "no $\varepsilon \vdash P$" para los distintos lenguajes L, los conjuntos ε y (clases de) las fórmulas P.

El resultado "$\varepsilon \vdash P$" puede ser demostrado mediante la descripción de la conclusión P de ε. No obstante, en casos que sean hasta cierto grado complejos, ésta resulta tan larga que es sustituida por instrucciones más o menos completas para formalizar tal descripción. Por último, la demostración "$\varepsilon \vdash P$" puede no ser acompañada en general de la presentación de la conclusión P de ε, aunque ésta sea incompleta. En este caso «no demostramos P, sino que demostramos que existe la demostración de P» (véase el ejemplo en el § 8 sobre las ampliaciones del lenguaje).

El resultado "no $\varepsilon \vdash P$" raras veces puede establecerse por el razonamiento puramente sintáctico, pero la demostración suele apoyarse en la construcción del modelo, o sea, en una interpretación en la cual ε es cierta y P, falsa (compárese con la discusión del problema del continuo en el cap. III). Si "no $\varepsilon \vdash P$" y "no $\varepsilon \vdash \neg P$", la fórmula P se denomina fórmula *independiente de* ε.

Brindemos dos resultados elementales útiles sobre las conclusiones. Se observa que, en comparación con las demostraciones corrientes, dichas conclusiones están ensambladas de piezas muy pequeñas. El matemático, como en botas de siete leguas, con un solo paso cubre campos enteros de conclusiones formales.

4.4. Lema. *Supongamos que* ε *contiene tautologías. Si* $\varepsilon \vdash P$ y $\varepsilon \vdash Q$, *entonces* $\varepsilon \vdash P \wedge Q$.

DEMOSTRACIÓN. Si $P_1, \ldots, P_m; Q_1, \ldots, Q_n$ son respectivamente conclusiones P y Q, entonces

$$P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n; P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)),$$
$$Q \rightarrow (P \wedge Q), P \wedge Q$$

es la conclusión $P \wedge Q$. La antepenúltima fórmula es una tautología; la penúltima, según MP (Modus Ponens), se deduce de aquélla y de $P_m = P$; la última, según MP, de la segunda y de $Q_n = Q$.

4.5. Lema sobre la deducción. *Supongamos que* $\varepsilon \supseteq \mathrm{Ax}\, L$ y P *es una fórmula cerrada. Si* $\varepsilon \cup \{P\} \vdash Q$, *entonces* $\varepsilon \vdash P \rightarrow Q$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q_1, \ldots, Q_n$ la conclusión Q de $\varepsilon \cup \{P\}$. Mediante la inducción por n demostraremos que existe la conclusión $P \rightarrow Q$ de ε.

a) $n = 1$. Entonces o bien $Q \in \varepsilon$, o bien $Q = P$. En el primer caso $P \rightarrow Q$ según MP se deduce de Q y de la tautología $Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$, en el segundo caso $P \rightarrow P$ es una tautología.

b) $n \geqslant 2$. Supongamos que para las conclusiones de la longitud $\leqslant n - 1$ el lema queda demostrado. Entonces $\varepsilon \vdash P \rightarrow Q_i$ para todas las $i \leqslant n - 1$. Luego, para $Q_n = Q$ hay posibilidades siguientes:

b_1) $Q \in \varepsilon$; b_2) $Q = P$; b_3) Q se deduce, según MP, de Q_i, $Q_j = Q_i \rightarrow Q$; b_4) Q tiene aspecto de $\forall x Q_j$ para $j \leqslant n - 1$.

Los casos b_1) y b_2) se analizan lo mismo que $n = 1$. En el caso b_3) la conclusión $P \rightarrow Q$ de ε tiene tal aspecto:

1) conclusión $P \rightarrow Q_i$ (suposición inductiva);

2) conclusión $P \rightarrow (Q_i \rightarrow Q)$ (suposición inductiva);

3) $(P \rightarrow (Q_i \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \rightarrow Q_i) \rightarrow (P \rightarrow Q))$ (tautología);

4) $(P \to Q_i) \to (P \to Q)$ (MP a (2) y (3));

5) $P \to Q$ (MP a (1) y (4)).

En lo sucesivo, tales razonamientos se realizarán de un modo más breve, señalando solamente los últimos pasos de la conclusión (aquí 3, 4 y 5).

Por último, en el caso b_4) la conclusión $P \to \forall x Q_j$ de ε se obtiene si se agregan a la conclusión $P \to Q_j$ de ε (suposición inductiva) las fórmulas

$\forall x (P \to Q_j)$ (Gen);

$\forall x (P \to Q_j) \to (P \to \forall x Q_j)$ (axioma, en virtud del carácter cerrado de P);

$P \to \forall x Q_j$ (MP aplicado a las dos fórmulas anteriores).

El lema queda demostrado.

Denotemos para el futuro que en los fragmentos de las conclusiones que se construyeron en los lemas 4.4 y 4.5, han sido utilizadas solamente las tautologías de los tipos A. O., A.1 y A.2 del p. 3.4.

Aduzcamos ahora las muestras de los axiomas espectrales.

AXIOMAS DE IGUALDAD. Sea L un lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$ en cuyo alfabeto hay una relación del rango dos $=$. Escribiremos $t_1 = t_2$ en vez de $= (t_1 t_2)$.

Si P es una fórmula; x, una variable y t, un término, denotaremos por $P(x, t)$ el resultado de la introducción de t en P en lugar de *cualquier parte* de las entradas libres de x en P que no enlazan a t.

4.6. Proposición. a) *Las fórmulas*

$$t = t;\ t_1 = t_2 \leftrightarrow t_2 = t_1;\ t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \to t_1 = t_3;$$

$$x = t \to (P(x, x) \to P(x, t))$$

son φ*-ciertas para cualquier interpretación de* L, *en la cual* φ $(=)$ *es una igualdad.*

b) *Todas las fórmulas del punto* a) *pueden ser deducidas del conjunto* $AxL \cup \{x = x \mid x$ variable$\} \cup \{x = y \to (P(x, x) \to P(x, y)), P$ elementales$\}$. *Las fórmulas de esta lista, salvo* AxL, se denominan axiomas de igualdad.

c) *Sea* φ *cualquier interpretación de* L *en el conjunto* M, *para la cual son ciertos los axiomas de igualdad. Entonces* $\varphi(=)$ *es la relación de equivalencia en* M *compatible con las interpretaciones de todas las relaciones y operaciones de* L *en* M. *Si denotamos por* φ' *la evidente interpretación de* L *en el conjunto cociente* $M' = M/\varphi(=)$, *entonces* $\varphi'(=)$ *es una igualdad, y* $T_\varphi \mathrm{L} = T_{\varphi'}\mathrm{L}$.

ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN. a) La φ-veracidad se establece sin dificultad. Limitémonos a la última fórmula. Sea ésta falsa en el punto $\xi \in \bar{M}$. Entonces $|x = t|(\xi) = 1$, $|P|(\xi) = 1$, $|P(x, t)|(\xi) = 0$. La primera afirmación significa que $x^\xi = t^\xi$. Pero entonces $|P|(\xi) = |P(x, t)|(\xi)$ según la suposición 2.10, en contra de la segunda y tercera igualdades.

b) Conclusión $t = t : x = x$ (axioma de igualdad);
$\forall x (x = x)$ (Gen); $\forall x (x = x) \to t = t$ («axioma de especialización» lógico); $t = t$ (MP).

Conclusión $t_1 = t_2 \leftrightarrow t_2 = t_1$:

1) $x = y \to (x = x \to y = x)$ (axioma de igualdad para $=$ en calidad de P);

2) $Q \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$, donde P es $x = y$, Q es $x = x$, R es $y = x$ (tautología);

3) $x = x$ (axioma de igualdad);

4) $(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)$ (MP aplicado a (2) y (3));

5) $x = y \to y = x$ (MP aplicado a (1) y (4)).

A continuación es preciso aplicar dos veces Gen, el axioma de especialización y MP para

deducir de (5) la fórmula $t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$; la sustitución de t_1 por t_2 y viceversa proporciona la deducción $t_2 = t_1 \to t_1 = t_2$; la conjunción de estas fórmulas se deduce según el lema 4.4; por último, la tautología $(t_1 = t_2 \to t_2 = t_1) \wedge \wedge (t_2 = t_1 \to t_1 = t_2) \to (t_1 = t_2 \leftrightarrow t_2 = t_1)$ juntamente con MP proporciona lo requerido.

La deducción de la tercera y cuarta fórmulas del p. 4.6a se la dejamos al lector. La existencia de la conclusión de la cuarta fórmula se demuestra razonando inductivamente por el número de conectivas y cuantificadores en P; P se representa en forma de $\neg Q$, $Q_1 * Q_2$ o $\forall xQ$, $\exists xQ$; se supone que para Q, Q_1, Q_2 en vez de P la conclusión ya está construida; se acaba de construir para P (véase Mendelson [2, págs. 87—88]).

d) De la φ-veracidad de los axiomas de igualdad se deduce la φ-veracidad de las fórmulas del p. 4.6a, ya que pueden ser deducidas. Las primeras tres fórmulas del p. 4.6, con arreglo a las tres distintas variables x, y, z, muestran entonces que la relación $\varphi(=)$ en M es reflexiva, simétrica y transitiva.

En efecto, sean X, Y, Z tres elementos cualesquiera de M, siendo $\xi \in \overline{M}$ un punto tal que $x^\xi = X$, $y^\xi = Y$, $z^\xi = Z$, sea $\sim$ la relación $\varphi(=)$ en M. La φ-veracidad de las fórmulas del p. 4.6a significa que $X \sim X$; $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$; $X \sim Y$ e $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

La compatibilidad de $\sim$ con la φ-interpretación de todas las relaciones y operaciones en M según la definición significa lo siguiente.

Sea p una relación y $\varphi(P) \subseteq M^r$, su interpretación. Si $\langle X_1, \ldots, X_r\rangle \in \varphi(p)$ y $X'_i \sim X_i$, entonces $\langle X_1, \ldots, X'_i, \ldots, X_r\rangle \in \varphi(p)$.

Sea f una operación y $\varphi(f)$: $M^r \to M$, su interpretación. Si $\varphi(f)(X_1, \ldots, X_r) = Y$ y $X'_i \sim X_i$, entonces $\varphi(f)(X_1, \ldots, X'_i, \ldots, X_r) = Y' \sim Y$.

deducir de (5) la fórmula $t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$; la sustitución de t_1 por t_2 y viceversa proporciona la deducción $t_2 = t_1 \rightarrow t_1 = t_2$; la conjunción de estas fórmulas se deduce según el lema 4.4; por último, la tautología $(t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1) \wedge \wedge (t_2 = t_1 \rightarrow t_1 = t_2) \rightarrow (t_1 = t_2 \leftrightarrow t_2 = t_1)$ juntamente con MP proporciona lo requerido.

La deducción de la tercera y cuarta fórmulas del p. 4.6a se la dejamos al lector. La existencia de la conclusión de la cuarta fórmula se demuestra razonando inductivamente por el número de conectivas y cuantificadores en P; P se representa en forma de $\neg Q$, $Q_1 * Q_2$ o $\forall\, xQ$, $\exists\, xQ$; se supone que para Q, Q_1, Q_2 en vez de P la conclusión ya está construida; se acaba de construir para P (véase Mendelson [2, págs. 87—88]).

d) De la φ-veracidad de los axiomas de igualdad se deduce la φ-veracidad de las fórmulas del p. 4.6a, ya que pueden ser deducidas. Las primeras tres fórmulas del p. 4.6, con arreglo a las tres distintas variables x, y, z, muestran entonces que la relación φ (=) en M es reflexiva, simétrica y transitiva.

En efecto, sean X, Y, Z tres elementos cualesquiera de M, siendo $\xi \in \overline{M}$ un punto tal que $x^\xi = X$, $y^\xi = Y$, $z^\xi = Z$, sea $\sim$ la relación φ (=) en M. La φ-veracidad de las fórmulas del p. 4.6a significa que $X \sim X$; $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$; $X \sim Y$ e $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

La compatibilidad de $\sim$ con la φ-interpretación de todas las relaciones y operaciones en M según la definición significa lo siguiente.

Sea p una relación y $\varphi(P) \subseteq M^r$, su interpretación. Si $\langle X_1, \ldots, X_r\rangle \in \varphi(p)$ y $X'_i \sim X_i$, entonces $\langle X_1, \ldots, X'_i, \ldots, X_r\rangle \in \varphi(p)$.

Sea f una operación y $\varphi(f)\colon M^r \rightarrow M$, su interpretación. Si $\varphi(f)(X_1, \ldots, X_r) = Y$ y $X'_i \sim X_i$, entonces $\varphi(f)(X_1, \ldots, X'_i, \ldots, X_r) = Y' \sim Y$.

d) *axiomas de distributividad:*

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$

e) *axiomas de inducción:*

$$P(\bar{0}) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x + \bar{1})) \rightarrow \forall x P(x),$$

donde P es cualquier fórmula del lenguaje.

La demostración es trivial y la dejamos al lector. Notaremos solamente que la misma «demostración» de la veracidad de los axiomas de inducción aprovecha la inducción como razonamiento metalingüístico.

COMENTARIOS. a) En el p. 4.7, $b - d$ hemos escrito axiomas corrientes del semianillo conmutativo para reducir las conclusiones formales: cualquier cálculo informal que aprovecha solamente estos axiomas puede ser transformado sin dificultad en una conclusión formal de su resultado en L_1 Ar.

E. Mendelson [2 cap. 3] aduce un sistema de axiomas más débil y luego muestra, cómo se deducen de él nuestras fórmulas. Esto ocupa 5—6 páginas de texto y, en lo general, hace de tributo a la tradición histórica que se remonta hasta Peano.

b) Los axiomas de inducción son un conjunto numerable de fórmulas de L_1Ar: se suele decir que la escritura de la proposición 4.7e es un *esquema de axiomas.*

La formulación del hecho respectivo en las matemáticas intuitivas es tal: «para cada propiedad de números enteros P, si 0 posee P y si de lo que x posee P se deduce que $x + 1$ posee P, entonces todos los números enteros poseen P». La «propiedad de números enteros» aquí es lo mismo que el «subconjunto arbitrario de números enteros».

No obstante, entre los medios expresivos de L_1Ar no hay modo que permita decir «cualquier subconjunto». Tampoco hay modo de nombrar «todas las propiedades», sólo se puede enumerar por turno las propiedades, las cuales pueden ser expresadas, mediante las fórmulas del lenguaje. Recordamos una vez más, que son un conjunto numerable, mientras que en la interpretación intuitiva se sobreentiende un continuo de propiedades. De este modo, el axioma de inducción formal es más débil que el informal, así como es más débil de aquella variante suya, la cual se obtenga al sumir L_1 Ar en L_1 Set.

Axiomas especiales de la teoría de conjuntos de Zermelo—Fraenkel (véase la descripción V en el apéndice al cap. II)

4.8. Proposición. *Las fórmulas que vienen a continuación son ciertas en la interpretación estándar del lenguaje* L_1 Set *en el universo de von Neumann* V:

a) *axioma del conjunto vacío*: $\forall x \neg (x \in \varnothing)$;

b) *axioma de la extensión:*

$$\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y;$$

c) *axioma del par:*

$$\forall u \forall w \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w);$$

d) *axioma de la suma:*

$$\forall x \exists y \forall u (\exists z (u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow u \in y);$$

e) *axioma de la potencia:*

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y),$$

donde $z \subseteq x$ *es el registro abreviado de la fórmula*

$$\forall u (u \in z \rightarrow u \in x);$$

f) *axioma de la regularidad*:

$$\forall x\,(\neg x = \varnothing \to \exists y\,(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)),$$

donde $y \cap x = \varnothing$ *es el registro abreviado para* $\neg\exists z\,(z \in y \wedge z \in x)$.

DEMOSTRACION Y EXPLICACIONES. Esta es una lista incompleta de axiomas de Zermelo — Fraenkel, los axiomas más finos de infinidad, sustitución y de elección se discutirán en el punto siguiente.

a) Las demostraciones de veracidad deberán, naturalmente, consistir en el cálculo de las funciones $|\ |$ según las reglas descritas en los puntos 2.4 y 2.5. Verifiquemos de este modo, digamos, la veracidad del axioma de la extensión. Sea ξ cualquier punto de la clase de interpretación, $X = x^{\xi}$, $Y = y^{\xi}$. Entonces tenemos que establecer que

$$|\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)|\,(\xi) = |x = y|\,(\xi),$$

es decir que

$$\min_{Z \in V}\,(|Z \in X|\,|Z \in Y| +$$
$$+ (1 - |Z \in X|)\,(1 - |Z \in Y|)) = |X = Y|,$$

donde escribimos $|Z \in X|$ en vez de $|z \in x|\,(\xi')$ con $z^{\xi'} = Z$, $x^{\xi'} = X$, etc. Pero la parte izquierda es igual a 1 cuando y sólo cuando para cada $Z \in V$ o bien simultáneamente $Z \in X$ y $Z \in Y$, o bien simultáneamente $Z \notin X$ y $Z \notin Y$, es decir, cuando $X = Y$.

Generalizando más, al sustituir aquí V por cualquier subclase $M \subseteq V$ y al limitar la interpretación estándar de L_1 Set sobre M, hallamos en el mismo cálculo: *el axioma de la extensión es cierto en* M, *si y sólo si para cualesquiera elementos* $X,\ Y \in M$ *tenemos* $X = Y \Leftrightarrow X \cap M =$

$= Y \cap M$, *es decir, si cada elemento de M se determina unívocamente por aquellos elementos suyos que se encuentran en M.*

De este resultado haremos uso más tarde.

Cálculos análogos para todos los demás axiomas han sido realizados sistemáticamente en el cap. III en una situación mucho más difícil. Por eso a continuación nos limitaremos a su traducción al argot, lo mismo que en el cap. I, y a las explicaciones concernientes a la posibilidad de su realización en V.

b) El axioma del conjunto vacío no necesita comentarios. Sólo notemos que, al interpretar L_1 Set en la subclase $M \subseteq V$, se podría interpretar la constante $\varnothing$ por cualquier elemento de $X \in M$ que tenga la propiedad $X \cap M = \varnothing$ sin alterar la veracidad de este axioma.

c) El axioma del par es cierto, porque si U, $W \in V_\alpha$, entonces $\{U, W\} \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, así que los pares se encuentran en V.

d) El axioma de la suma es cierto, porque si $X \in V$, entonces el conjunto $Y = \bigcup_{Z \in X} Z$ también se encuentra en V. En verdad, si $X \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, entonces los elementos de X son subconjuntos de V_α y su reunión también se encuentra en $V_{\alpha+1}$.

e) El axioma de la potencia es cierto, porque si $X \in V$, entonces $\mathcal{P}(X) \in V$. En efecto, si $X \in V_\alpha$, entonces $X \subseteq V_\alpha$ y, por lo tanto, $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, así que $\mathcal{P}(X) \in V_{\alpha+2}$.

f) El axioma de la regularidad es cierto, porque cualquier conjunto no vacío $X \in V$ tiene una intersección vacía con cierto elemento suyo, y en tal aspecto el mismo está demostrado en el apéndice para el cap. II del «Universo de von Neumann».

4.9. Los axiomas del lenguaje L_1 Set recogidos en el p. 4.8 están unidos por una propiedad común:

en la interpretación estándar, de su modelo más simple sirve exactamente la reunión ω_0 de los primeros pisos de $V_{\omega_0} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ del universo de von Neumann. Con otras palabras, éste es un conjunto de conjuntos transitivamente finitos $X \in V$, tales que si $X_n \in X_{n-1} \in \ldots \in X_0 = X$, entonces todos los X_i son finitos.

V_{ω_0} es un mundo seguro de la teoría coordinatoria y la teoría de los números; son necesarios otros principios, nuevos, para salir fuera de sus límites. Son dos: el axioma de la infinidad y el esquema de axiomas de la sustitución.

a) *Axioma de la infinidad:*

$$\exists x\, (\varnothing \in x \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow \{y\} \in x)).$$

Aquí $\{y\} \in x$ es una abreviatura para $\exists z\, (z = \{y, y\} \wedge z \in x)$, la abreviatura $z = \{y, y\}$ viene explicada en el p. 3.7 del cap. I. Este axioma nos hace agregar a V_{ω_0} algún conjunto que contenga los elementos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, ... (en cantidad numerable). Después, para asegurar la veracidad del axioma de la potencia en su variante substancial habrá que agregar $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}^2(X)$, ..., saliendo desesperadamente fuera de los límites de los conjuntos finitos, numerables, continuos ...

Es asombroso que en la variante formal de la teoría de conjuntos eso no es así, y nosotros siempre podemos limitarnos a los submodelos numerables transitivos de V. Esa importante circunstancia se discutirá detalladamente a continuación, en el § 7.

b) *Esquema de axiomas de la sustitución.* Introduzcamos la siguiente escritura abreviada cómoda (en cualquier lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$ con

igualdad): $\exists\, !yP(y)$, la cual significa

$$\exists yP(y) \wedge \forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y).$$

De este modo, esta fórmula se lee «existe un objeto único y con la propiedad de P», si se sobreentiende que $=$ se interpreta como igualdad.

Si en P entran libremente otras variables, a excepción de y, la veracidad de la fórmula $\exists !yP(y)$ significa que P prefija y como una «función implícita» de estas demás variables.

Ahora podemos escribir los axiomas de sustitución. A continuación van distinguidas en la fórmula P todas las variables que integran libremente P:

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n\, \forall u\, (\forall x\, (x \in u \rightarrow \exists !\, yP(x, y, z_1, \ldots, z_n)) \rightarrow \exists w\, \forall y\, (y \in w \leftrightarrow \exists x\, (x \in u \wedge P(x, y, z_1, \ldots, z_n)))).$$

La premisa se lee así: «P prefija y como función de $x \in u$ para cualesquiera que sean los valores de los parámetros de $z_1, \ldots, z_n$», conclusión: «la imagen de cualquier conjunto u con respecto a esta función es cierto conjunto w».

Para las necesidades de la teoría formal es útil notar que de este axioma y los axiomas de la igualdad pueden ser deducidas las tal llamadas fórmulas de la distinción:

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n\, \forall x\, \exists y\, (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge P(u, z_1, \ldots, z_n)),$$

es decir, «si una clase de conjuntos u que poseen la propiedad de P se interseca con el conjunto x, se obtiene un conjunto».

El axioma de la sustitución exige un examen muy minucioso. Sale fuera de los límites de las herramientas operacionales corrientes (y por eso

consideradas como intuitivamente evidentes) del topólogo y analista. En verdad, este axioma afirma que, digamos, cualquier ordinal α no puede ser «extendido» demasiado lejos por medio de una función f: independientemente de cómo se escoja f, se hallará un ordinal β tal que todos los valores de $f(\gamma)$, $\gamma \leqslant \alpha$ se encontrarán en V_β, es decir, la infinidad del universo V es mucho más grande que la de cualquiera de su piso V_α.

Incluso si se acepta este axioma, quedan intuitivamente inconcebibles e insolubles, con ayuda de él y de los demás axiomas, las cuestiones muy próximas a éste según el estilo. Por ejemplo ¿existen o no los tal llamados *cardinales inaccesibles* γ?

Una de las propiedades del cardinal inaccesible γ es tal: si f es una función de V_α en V_γ (con $\alpha < < \gamma$), entonces el conjunto de sus valores es elemento de V_γ. En particular, hay un «límite superior» fuera del cual no pueden ser extendidos los ordinales que no superen a γ.

¿Existen tales infinidades o no?

Las reflexiones sobre éstos y semejantes problemas de la infinidad llevaron a muchos especialistas de los fundamentos de las matemáticas a la convicción de que el lenguaje de la teoría de conjuntos del tipo L_1 Set y uno u otro sistema de axiomas en él son la única realidad, con la cual se ha de trabajar, y que las tentativas de atribuir sentido al universo V o a modelos análogos en principio están condenadas a sufrir fracaso. En particular, el conjunto de fórmulas verdaderas en la interpretación estándar de L_1 Set no está definido, y se puede hablar solamente de fórmulas que se deducen de los axiomas.

Por una serie de causas no aceptaremos completamente este punto de vista. La más simple consiste en la sensación de que el lenguaje sin inter-

pretación no sólo está privado de su justificación interior, sino que tampoco puede ser usado. Hasta al «juego formal» con los símbolos jugamos bien, cuando nos guiamos de las representaciones intuitivas del sentido de estos símbolos. El lenguaje (junto con el mundo exterior) ayuda a ordenar y precisar tales representaciones lo cual, por su parte, hace cambiar el lenguaje o volver a tasar las construcciones lingüísticas anteriores. Pero en ningún instante podemos considerar que hemos alcanzado la claridad total.

La autorrestricción sucesiva merece comprensión. Sin embargo, el ascetismo intelectual (al igual que todos los demás tipos de ascetismo) no puede ser destino de muchos.

c) *Axioma de la elección:*

$\forall x\, (\neg x = \varnothing \rightarrow \exists y$ ("y es función con dominio de definición de x" $\wedge\, \forall u\, (u \in x \wedge \neg u =$ $= \varnothing \rightarrow \exists w\, (w \in u \wedge$ "$\langle u,\ w\rangle \in y$")))),

es decir, y elige un elemento de cada elemento no vacío $u \in x$.

La confianza en la veracidad de este axioma en V por lo menos parece ser tan motivada como la fe en la existencia del propio V. En el transcurso del medio siglo pasado la misma se ha hecho habitual para cualquier matemático trabajador, y las discusiones tempestuosas en torno de ella a principios del siglo casi no se entienden actualmente. Remitimos al lector interesado al libro de A. Fraenkel e Y. Bar-Hillel [17, cap. II].

4.10. Propiedades comunes de los axiomas. A pesar de toda la diversidad de las representaciones relacionadas con los axiomas, cada conjunto de axiomas en los lenguajes de $\mathcal{L}_1$ descrito por nosotros (tautologías; *Ax* L; axiomas especiales en L_1 Ar y L_1 Set) posee las siguientes características sintácticas no formales:

a) se puede indicar el algoritmo que reconoce por la expresión dada, si es un axioma (compárense el análisis sintáctico en el § 1 y las verificaciones del carácter tautológico en el p. 3.4);

b) se puede indicar el número finito de las reglas de engendro de axiomas.

Claro está que a priori la propiedad b) es menos restrictiva que a). En efecto, el algoritmo reconocedor puede ser convertido en la regla de engendro: «cópiense seguidamente en orden lexicográfico todas las expresiones y déjense aquellas, para las cuales el algoritmo proporciona una respuesta positiva».

En realidad, es cosa natural considerar que la propiedad a) deberá ser inherente a los axiomas, y b), a las fórmulas que pueden ser deducidas, cualquiera que sea la descripción explícita de éstas y aquéllos que se adopte en el lenguaje concreto. En el cap. III estas representaciones intuitivas serán formuladas en forma de exactas definiciones y se mostrará que b) es mucho más débil que a). Compárese también la discusión en el p. 11.6c de este capítulo.

Digresión sobre la demostración

1. La demostración llega a ser tal sólo como resultado del acto social de «aceptación de la demostración».

Esto se refiere a las matemáticas en el mismo grado como a la física, lingüística o biología. La evolución de los criterios reconocidos de la demostrabilidad es un tema casi no investigado en la historia de la ciencia. Sin embargo, desde la época de Euclides queda invariable la estructura ideal de la demostración matemática de la «verdad no evidente»: el paso a ella de las premisas

evidentes o establecidas anteriormente por medio de una serie de inferencias elementales «evidentemente legales» y explícitamente expresadas.

De este modo, la deducción como método universalmente científico es un método de las matemáticas par excellence. («La inducción matemática» se remonta explícitamente hasta la misma idea. El principio de inducción de Peano postula el permiso de escribir solamente los pasos primero y general de la demostración y, de este modo, es de hecho el primer principio matemático. Esto se oscurece debido a la concernencia tradicional del axioma de Peano a los especiales (p. 4.7e), pero, como quiera que sea, este axioma pertenece a los arquetipos fundamentales del pensamiento matemático).

Cuanto más largo es el razonamiento deductivo, tanto más rígidas son las exigencias referentes al carácter explícito y grado de normalización de sus componentes elementales. En resumidas cuentas, la cantidad de datos iniciales es tan pequeña en las matemáticas formales que la inobservancia de las reglas de higiene en las conclusiones largas conduce a la desintegración del sistema, si no se lo corrige por fuera. En el caso de inducción, al revés, las conclusiones comparativamente cortas descansan sobre un material inicial vasto: la concepción darwiniana de la evolución se explica a los escolares, pero apenas bastaría una vida para apreciar la persuasión de sus demostraciones. Una situación análoga se observa en la lingüística comparada al reconstruir los hechos protolingüísticos. Por eso aquí no pueden ser tan rígidas las «reglas de deducción» a pesar de la crítica de los jóvenes gramáticos.

2. Las opiniones expuestas arriba concuerdan con lo que el concepto de conclusión formal en los lenguajes de $\mathcal{L}_1$ es una buena aproximación

a la idea sobre una demostración matemática ideal. Por eso es más aleccionador analizar las diferencias entre las conclusiones y nuestros argumentos cotidianos.

a) *Confiabilidad de los principios.* No sólo las matemáticas inculcadas en los axiomas especiales de L_1 Set y L_1 Ar, ni siquiera la lógica de los lenguajes de $\mathcal{L}_1$ están reconocidas universalmente. En particular, después de Brouwer se impugna el principio del tercer excluido. Desde estas posiciones extremadamente críticas nuestras «demostraciones», en el mejor de los casos, infieren irreprochablemente de la mentira el disparate.

Un matemático no puede permitirse ser totalmente sordo a esta crítica; al adentrarse en ella se debe por lo menos tener conciencia de que existen objetivamente distintos «grados de la demostrabilidad» de las demostraciones.

b) *Niveles de la demostrabilidad.* Cada demostración propuesta se aprueba a la aceptabilidad por los matemáticos, a veces de varias generaciones. En este caso se somete a precisión la propia demostración y su resultado. En la mayoría de los casos la demostración es un esquema más o menos breve de la conclusión formal en el lenguaje adecuado. No obstante, como ya se ha indicado, a veces la afirmación P se establece por medio de la demostración de que la demostración P existe. Esa jerarquía de demostraciones de la existencia de demostraciones puede ser muy alta. Nosotros la quitamos con ayuda de los principios lógicos superiores o de la teoría de conjuntos, con los cuales, sin embargo, no es obligatorio ponerse de acuerdo. Las obras de las matemáticas constructivas abundan en afirmaciones de tipo: «es imposible que no existe un algoritmo que calcule x» allí, donde el matemático clásico dijera simplemente «x existe» o por

lo menos «x existe y puede ser calculado con eficiencia».

c) *Errores.* Las peculiaridades de la psiquis humana hacen que las conclusiones formales prácticamente no se dejan comprobar, hasta si consentimos que esto es un tipo de demostración ideal. Dos circunstancias actúan perniciosamente en el mismo sentido: las conclusiones formales son mucho más largas que los textos en argot; la velocidad de su lectura consciente por el hombre es mucho más baja.

No son raros los casos, cuando un solo teorema se demuestra en cinco, quince y hasta cincuenta páginas. Las demostraciones de dos hipótesis de Burnside de la teoría de los grupos finitos ocupan cada una cerca de quinientas páginas. Es imposible imaginarse la longitud de las conclusiones formales.

Por eso, la falta de errores en el trabajo matemático (si no han sido descubiertos), al igual que en las demás ciencias naturales, a menudo se establece por los datos indirectos: tiene importancia la conformidad con las esperanzas generales, el uso de argumentos análogos en otros trabajos, el examen «con el microscopio» de trozos aislados de la demostración, hasta el crédito del autor; en una palabra, la capacidad de reproducción en el sentido lato de la palabra. Las demostraciones «incomprensibles» pueden desempeñar un papel muy útil, estimulando las búsquedas de razonamientos más accesibles.

En los últimos decenios apareció un medio muy potente para sacar conclusiones formales largas: se trata del ordenador. A primera vista esto puede cambiar bruscamente el statu de la conclusión formal y hacer realizable el ideal leibniziano de la verificación mecánica de la

veracidad. En la realidad el asunto es mucho menos trivial.

Aduzcamos primeramente dos opiniones competentes al respecto que pertenecen a C. L. Siegel y a H. P. F. Swinnerton-Dyer [32, 33]. Los dos expresaron su parecer sobre el tratamiento a máquina de los problemas concretos de la teoría de los números.

3. El nivel actual de nuestros conocimientos sobre el gran teorema de Fermat es tal. Sea p un número primo. Este número se denomina regular, si no divide el numerador de ninguno de los números de Bernoulli

$$B_2=\frac{1}{6}, \quad B_4=-\frac{1}{30}, \ \ldots, B_{p-3}.$$

Para los índices regulares p el teorema de Fermat fue demostrado por Kummer. Para los p irregulares hay una jerarquía de criterios de veracidad de la afirmación de Fermat que se reducen a la verificación de la ausencia de algunas divisibilidades; si éstas tienen lugar, hay que probar otras divisibilidades, etc. La verificación de los criterios para cada p exige un gran cálculo en el ordenador; según el informe de 1955, ella fue realizada con éxito para todos los $p < 4002$ [32] *.

Denotemos con $v(x)$ la razón del número de los $\leqslant x$ irregulares, primos al número de los regulares. Kummer supuso que $v(x) \to 1/2$ para $x \to \infty$. Siegel [34] considera más verosímil el valor del límite $\sqrt{e}-1$, alega argumentos probabilísticos a su favor y lo compara con los datos de Selfridge — Nicol — Vandiver, cuya

* Hasta ahora con ayuda del ordenador el teorema de Fermat está demostrado para todos los $p < 125\,000$. (*Nota de la Redacción.*)

discusión termina con una frase inesperada: ¡«Además, es necesario tomar en consideración que los valores numéricos arriba citados de la función $v(x)$ han sido obtenidos con ayuda de ordenadores y por eso, hablando estrictamente, no pueden ser considerados por demostrados»!

4. El punto de vista de Siegel puede ser explicado por la reacción natural a la información obtenida de segunda mano. A continuación vienen extractos extensos del artículo de un matemático profesional y programador perito [33] dedicado al problema siguiente.

Sean L_1, L_2, L_3 tres formas lineales homogéneas procedentes de tres variables con coeficientes reales y el determinante Δ. Supongamos que la cota inferior $|L_1L_2L_3|$ sobre puntos enteros no nulos (salvo el comienzo) es igual a 1. ¿Qué se puede decir de tales valores de Δ?

El problema para dos formas de dos variables en sumo grado ha sido resuelto por A. A. Márkov: los valores de $\Delta < 3$ constituyen un conjunto numerable $\{\sqrt{9-4/n^2} \mid n = 1, 2, 5, 13, 29, \ldots\}$. Aquí n recorre la sucesión calculable de los números enteros que se describe explícitamente.

Para tres formas Davenport demostró (1943) que $\Delta = 7$, o $\Delta = 9$, o $\Delta > 9{,}1$. H. P. F. Swinnerton-Dyer calcula en el artículo citado [33] todos los valores de $\Delta \leqslant 17$ suponiendo que hay un número finito de éstos y brinda su lista: el tercero es igual a $\sqrt{148}$, el último (décimoctavo), a $\sqrt{2597/9}$. Discutiendo este resultado, aduce un testimonio interesante: «Si algún teorema ha sido demostrado con ayuda del ordenador, resulta que es imposible formular su demostración de modo que satisfaga el requisito corriente: darle la posibilidad al lector bastante paciente a que la estudie y se cerciore de su corrección.

Hasta la reimpresión de todos los programas y datos de entrada (en nuestro caso ellos ocuparían unas cuarenta páginas de lectura bastante fastidiosa) no puede garantizar que durante el cálculo real no hayan sido perforadas o calculadas erróneamente las fichas. Además, cada ordenador contemporáneo tiene vicios latentes en los rincones ciegos de los programas y de la electrónica (que tan raramente acarrean errores que durante años quedan desapercibidos) y cualquier ordenador está expuesto a fallos. A pesar de ser muy raros tales errores, algunos de ellos podían tener lugar en el curso de las computaciones, de los cuales nos referimos en este artículo».

Los argumentos positivos también son muy curiosos:

«No obstante, la esencia de nuestros cálculos consiste en la búsqueda de nada más que unas cuantas agujas en un almiar de heno de seis dimensiones, y casi toda la búsqueda se realiza en las partes del almiar, donde no hay agujas. Por eso los errores en estos dominios no influirán en el resultado final... creo que la lista de los discriminantes $\Delta \leqslant 17$ está completa, y es increíble que hayamos omitido una cantidad infinitamente grande de valores tolerables $\leqslant 17$».

Conclusión: «No obstante, el único método de comprobar estos resultados (si lo merecen) es atacarlos independientemente, habiendo escrito otro programa para otro ordenador. Precisamente así es la situación en la mayoría de las ciencias experimentales».

Notemos que la elaboración y, en cierto grado, almacenamiento de grandes fondos de información operativa en general, fuera del cerebro humano, lleva a los problemas sociales, de los cuales se da cuenta cada vez más claramente y que salen lejos fuera de los límites de las cuestiones de

certeza de las conclusiones matemáticas.

5. Por fin, citaremos la impresión producida por las demostraciones mecánicas, hasta cuando se realizan a mano, la cual tuvieron que experimentar muchos.

Después de formular una cierta proposición de que "la función $T_{W,n_0}\,\theta$ ha sido definida correctamente", el fuerte matemático D. Mumford que trabaja activamente, escribe [35, pág. 230]: «Esta proposición se establece con ayuda de cálculos tremendamente largas, aunque completamente simples. Efectuándolos hasta el final y con todos los detalles gasté varias horas, pero no llegué a ser más inteligente, sólo me cercioré de la corrección de la definición. Por eso omitiré aquí los detalles».

Moraleja: una buena demostración es un razonamiento que nos hace más inteligente.

5. Tautologías y álgebras booleanas

5.1. Proposición. *Se puede señalar una lista finita de tautologías básicas —polinomios lógicos de tres argumentos P, Q, R con la propiedad siguiente.*

Sean L *cualquier lenguaje de la clase* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{F}$, *el conjunto de todas las fórmulas de* L, *que se obtienen de las tautologías básicas sustituyendo P, Q, R por toda clase de fórmulas del lenguaje. Entonces toda tautología en* L *puede ser deducida de* $\mathcal{F}$ *empleando solamente la regla* MP.

La elección de las tautologías básicas de ningún modo es unívoca. Nuestra lista se compondrá de las tautologías A.0, A.1, A.2, A.3, B.1, B.2 del p. 3.4 y de las tautologías que vienen a continuación:

C.1. $\neg(P \to \neg Q) \to (P \wedge Q)$, $(P \wedge Q) \to \neg(P \to \neg Q)$;

C.2. $(\neg P \to Q) \to (P \vee Q)$, $(P \vee Q) \to \to (\neg P \to Q)$;

C.3. $P \to (\neg Q \to \neg (P \to Q))$;

C.4. $(P \to Q) \to ((\neg P \to Q) \to Q)$;

C.5. $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$;

C.6. $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \to (P \leftrightarrow Q)$;

C.7. $\neg P \wedge Q \to \neg(P \to Q)$.

Economizamos no en la dimensión de la lista básica, sino en la longitud de la demostración de la proposición 5.1, por eso la lista A.0 — C.7 no es la más corta. Para la lógica de $\mathcal{L}_1$ esto no es esencial; sólo para las lógicas modificadas del tipo intuicionista se requiere un análisis más cauteloso.

DEMOSTRACIÓN. Sea ε el conjunto finito de las fórmulas de L; P, el polinomio lógico (con representación fija) sobre ε. Examinemos la aplicación v: $\varepsilon \to \{0, 1\}$ y lo continuemos sobre P por las mismas fórmulas, las cuales definían en el p. 2.3 la función de veracidad $||$. Supongamos que

$$P^v = \begin{cases} P, \text{ si } v(P) = 1, \\ \neg P, \text{ si } v(P) = 0. \end{cases}$$

5.2. Lema principal. *Sea* $\varepsilon^v = \{Q^v \mid Q \in \varepsilon\}$. *Entonces para cualquier* v *tenemos*: $\mathcal{F} \cup \varepsilon^v \vdash P^v$ *(con la ayuda de* MP).

El lema es la formalización de la idea siguiente. Es natural demostrar la proposición 5.1 razonando por inducción a lo largo de la tautología, pero las partes de la tautología pueden no ser tautologías. La operación que traslada P en P^v hace forzadamente «v-cierta» cualquier fórmula y permite realizar la inducción.

5.3. DEMOSTRACIÓN de 5.1 con la ayuda del lema principal. Sea P una tautología y $P^v = P$ para todas las v (las notaciones son las mismas). Supongamos que $\varepsilon = \{P_1, \ldots, P_r\}$.

Según el lema principal $\mathcal{F} \cup \{P_1^v, \ldots, P_r^v\} \vdash$ $\vdash P$ con la ayuda de MP para cualquier v. Mostremos que entonces $\mathcal{F} \cup \{P_1^v, \ldots, P_{r-1}^v\} \vdash$ $\vdash P$ con la ayuda de MP. La inducción hacia abajo por r proporciona lo requerido (la suposición de que P es un polinomio lógico de $P_1, \ldots$ $\ldots, P_r$ no se utiliza en la transición inductiva).

El lema de la deducción 4.5 muestra que $\mathcal{F} \cup \{P_1^v, \ldots, P_{r-1}^v\} \vdash (P_r^v \to P)$ con la ayuda de MP: es necesario recurrir a su demostración y cerciorarse de que en la deducción participan sólo tautologías de $\mathcal{F}$ y MP, porque Gen no ha participado en la deducción de P.

Por cuanto para cualquier v existe v' que coincide con v sobre $P_1, \ldots, P_{r-1}$, pero que se diferencia sobre P_r, tenemos: $P_r \to P$ y $\neg P_r \to P$ se deducen de $\mathcal{F} \cup \{P_1^v, \ldots, P_{r-1}^v\}$ con la ayuda de MP. Por otra parte, la tautología C.4: $(P_r \to P) \to ((\neg P_r \to P) \to P$ se encuentra en $\mathcal{F}$. Aplicando dos veces MP, deducimos P.

5.4. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA PRINCIPAL. Procedamos por inducción según el número de conectivas en la representación P en forma de un polinomio lógico sobre ε. Si no existen, es decir $P \in \varepsilon$, es evidente la afirmación. En caso contrario P tiene el aspecto de $\neg P$ o $Q_1 * Q_2$, donde $*$ es una de las conectivas binarias.

a) *Caso* $P = \neg Q$. Si $v(Q) = 0$, entonces $Q^v = \neg Q = P = P^v$. Lo que $Q^v = P^v$ puede ser deducida de $\mathcal{F} \cup \varepsilon^v$ es una suposición inductiva. Pero si $v(Q) = 1$, entonces $Q^v = Q$, $P^v =$ $= \neg\neg Q$. Aquí Q se deduce de $\mathcal{F} \cup \varepsilon^v$ por la suposición inductiva, luego la tautología de $\mathcal{F}$: $Q \to \neg\neg Q$ y MP proporcionan la deducción de P^v.

b) *Caso* $P = Q_1 * Q_2$. Primeramente tabulemos, para distintas combinaciones de $*$ y $v(Q_1)$, $v(Q_2)$, las fórmulas, cuyas deducciones

existen según la suposición inductiva, y las fórmulas que han de ser deducidas.

En las columnas para $\wedge$, $\vee$ se indican tales fórmulas, de las cuales, empleando MP, con ayuda de las tautologías de $\mathcal{F}$ (tautologías B.1, B.2 del p. 3.4), se deducen $(Q_1 \wedge Q_2)^r$ y $(Q_1 \vee Q_2)^v$, respectivamente.

«Deductividad» en los comentarios para la tabla significa «deductividad de $\mathcal{F}$ y del par de fórmulas de la primera columna con ayuda de MP».

DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS 1—16 (los números de las fórmulas se dan en la tabla). He aquí la consideración más simple: si P puede ser deducida, entonces para cualquier Q la fórmula $Q \rightarrow P$ también puede ser deducida (tautología A.1 y MP). Esto proporciona inmediatamente la deductividad de las fórmulas 2, 4, 10 y 12. Después de quitar en la columna $\wedge$ las negaciones dobles con ayuda de la tautología de B.1 y MP, obtendremos la deductividad de las fórmulas 5 y 7. La deducción de las fórmulas 4 en el último renglón por la simetría proporciona la deducción $Q_2 \rightarrow Q_1$; el lema 4.4. y la tautología C.6 proporcionan la deducción de las fórmulas 16 desde $Q_1 \rightarrow Q_2$ y $Q_2 \rightarrow Q_1$.

1 se deduce de $\neg Q_2 \rightarrow \neg Q_1$ y C.5 por medio de MP. Según la simetría se deduce $Q_2 \rightarrow Q_1$ y luego 13 al igual que 16.

3 se deduce de C.3: $Q_1 \rightarrow (\neg Q_2 \rightarrow \neg (Q_1 \rightarrow Q_2))$ y de las conclusiones dadas empleando dos veces MP.

6 se deduce de B.2: $\neg Q_1 \rightarrow (Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$ y de las conclusiones dadas empleando MP, B1 y MP.

8 se deduce de C.3: $Q_1 \rightarrow (\neg \neg Q_2 \rightarrow \neg (Q_1 \rightarrow \rightarrow \neg Q_2))$ y de las conclusiones dadas empleando MP, aplicando B.1 a $\neg \neg Q_2$ y empleando de nuevo MP.

7—01152

$v(Q_1)$	$v(Q_2)$	Conclusiones dadas	Es necesario deducir			
			$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$
0	0	$\neg Q_1, \neg Q_2$	1. $Q_1 \rightarrow Q_2$	5. $\neg\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	9. $\neg(\neg Q_1 \rightarrow Q_2)$	13. $Q_1 \leftrightarrow Q_2$
0	1	$\neg Q_1, Q_2$	2. $Q_1 \rightarrow Q_2$	6. $\neg\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	10. $\neg Q_1 \rightarrow Q_2$	14. $\neg(Q_1 \leftrightarrow Q_2)$
1	0	$Q_1, \neg Q_2$	3. $\neg(Q_1 \rightarrow Q_2)$	7. $\neg\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	11. $\neg Q_1 \rightarrow Q_2$	15. $\neg(Q_1 \leftrightarrow Q_2)$
1	1	Q_1, Q_2	4. $Q_1 \rightarrow Q_2$	8. $\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	12. $\neg Q_1 \rightarrow Q_2$	16. $Q_1 \leftrightarrow Q_2$

9 se deduce de C.3: $\neg Q_1 \to (\neg Q_2 \to \neg(\neg Q_1 \to Q_2))$ empleando dos veces MP.

11 se deduce de B.2: $\neg\neg Q_1 \to (\neg Q_1 \to Q_2)$ cambiando $\neg\neg Q_1$ por Q_1 según B.1 y MP.

14 se deduce de C.7: $\neg Q_1 \wedge Q_2 \to \neg(Q_1 \leftrightarrow Q_2)$ con ayuda del lema 4.4 y MP.

15 se deduce de forma análoga a 14.

La proposición 5.1 queda demostrada.

5.5. Tautologías y probabilidad. Las tautologías son enunciados que son ciertas independientemente de la veracidad o falsedad de sus «partes integrantes». Esta afirmación se conserva incluso si se confieren a los elementos de la tautología valores probabilísticos de veracidad $\| P \|$ en el álgebra de conjuntos medibles de algún espacio probabilístico.

Por ejemplo: la tautología $R \vee S \vee \neg\neg R \vee \neg S$ —«ora llueve, ora nieva; ora sí, ora no»— es una predicción fidedigna del tiempo, a pesar de la extremada complejidad del espacio probabilístico meteorológico.

Es cómodo formular el resultado exacto en términos de las álgebras booleanas.

5.6. Algebras booleanas. El álgebra booleana B es un conjunto con operación $'$ del rango 1 y dos operaciones $\vee$, $\wedge$ del rango 2, así como con dos elementos distinguidos 0, 1 que satisfacen los axiomas siguientes:

a) $(a')' = a$ para todas $a \in B$;

b) $\wedge$, $\vee$ son asociativas y conmutativas;

c) $\wedge$, $\vee$ son distributivas una respecto a otra;

d) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$;

e) $a \vee a = a \wedge a = a$;

f) $1 \wedge a = a$; $0 \vee a = a$.

Ejemplos. a) B es el conjunto de todas las partes del conjunto M, $'$ es el complemento, $\wedge$ es la intersección, $\vee$ es la reunión, 0 es el subconjunto vacío, 1 es todos los M.

b) B es el conjunto de subconjuntos abierto-cerrados del espacio topológico M con las mismas operaciones.

c) B es el conjunto de subconjuntos medibles del espacio probabilístico M con las mismas operaciones.

En todos estos casos se puede identificar B con el espacio de las funciones características de los correspondientes subconjuntos (que adquieren los valores 1 sobre el subconjunto y 0 sobre el complemento).

5.7. Función de veracidad booleana. Sea B el álgebra booleana, ε es un conjunto de fórmulas del lenguaje L. Sea $\| \; \| : \varepsilon \to B$ cualquier aplicación. Prolonguémosla a los polinomios lógicos sobre ε (con más precisión, sus representaciones) según las fórmulas recursivas:

$$\| P \leftrightarrow Q \| = (\| P \| \wedge \| Q \|) \vee (\| P \|' \wedge \| Q \|'),$$

$$\| P \to Q \| = \| P \|' \vee \| Q \|, \quad \| P \vee Q \| = P \| \vee$$
$$\vee \| Q \|,$$

$$\| P \wedge Q \| = \| P \| \wedge \| Q \|, \quad \| \neg P \| = \| P \|'.$$

En el caso de $B = \{0, 1\}$ estas fórmulas se convierten en definiciones del p. 2.5. Notemos que $\vee$ y $\wedge$ en las partes izquierdas y derechas tienen distinto sentido.

5.8. Proposición. *Sea P —polinomio lógico— una tautología sobre ε. Entonces para toda aplicación $\| \; \| : \varepsilon \to B$ en cualquier algebra booleana B tenemos $\| P \| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. El ejemplo de la aplicación natural $\| \; \|$ se obtiene así: si está dada la interpretación del lenguaje L en el conjunto M, se pueden considerar las funciones de veracidad $| P | (\xi)$ por funciones características de los subconjuntos expresados de la clase de interpretación $\widetilde{M}$ (véase el § 2). Por eso nuestra función

corriente de veracidad adquiere en realidad valores booleanos. Ellos se meten en el álbegra booleana de todos los subconjuntos de $\bar{M}$ la cual se descompone en producto directo de las algebras booleanas de dos puntos $\{0, 1\}$. Por eso la conclusión aquí resulta trivialmente de la condición.

En el caso general se podría hacer uso del teorema de Stone sobre la estructura de las álgebras booleanas.

En vez de esto indicaremos, cómo reducir el problema a unos cuantos cálculos no complicados con ayuda de la proposición 5.1. Para esto basta verificar la $\| \, \|$-veracidad de las tautologías básicas y la conservación de la $\| \, \|$-veracidad al emplear el MP. Por ejemplo, si $\| P \| = 1$ y $\| P \rightarrow \rightarrow Q \| = 1$, entonces $\| P \|' = 0$, $\| P \|' \vee \| Q \| = = 1$, de donde $\| Q \| = 1$ debido a 5.6f: esto resuelve el problema del MP. De forma análoga se calculan los valores de veracidad de las tautologías básicas con ayuda de los axiomas del p. 5.6.

Las funciones de veracidad booleanas serán el instrumento principal en la exposición del método forcing de Cohen en el cap. III.

Digresión con los kennings

1. El proceso descrito en el § 5 origina toda clase de tautologías con la ayuda del número finito de las reglas. En la lingüística actual es muy popular la tentativa de describir adecuadamente los lenguajes naturales por medio de las reglas engendradoras (N. Jomski y otros), véase, por ejemplo, el libro de A. V. Gladki, I. A. Melchuk [24].

No obstante, muchos psicólogos consideran que este concepto tiene poco que ver con el proceso real del habla. Este último, según una de

las opiniones, se asemeja más al juego probabilístico, a una persecución, a la corriente de un río por un terreno con relieve complicado. La elección de la palabra de turno para dar origen a la frase se determina estadísticamente tanto por el principio formativo general (pensamiento, situación, estado psicológico), como por las peculiaridades de la semántica, formalización gramática, fonética, la nube asociativa de las palabras ya dichas.

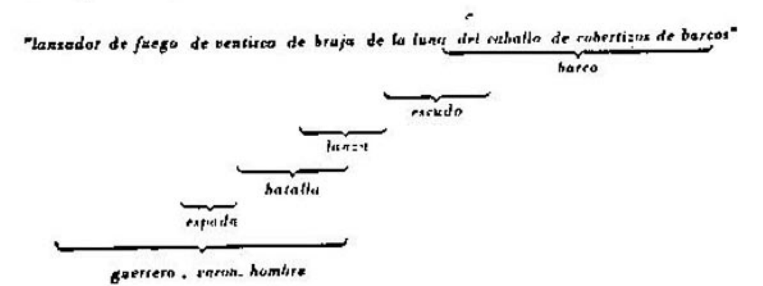
Se puede esperar que las gramáticas formales sean más adecuadas a los fragmentos especiales de los lenguajes naturales, organizados más rígidamente en tal o cual sentido: digamos, a los lenguajes de determinados sistemas poéticos o jurídicos. En estos fragmentos desempeñan un papel esencial las «reglas de prohibición» que, por ejemplo, eliminan todos los textos sin dibujo rítmico expresado. Hasta una introspección superficial permite cerciorarse de la realidad psicológica de tales reglas con respecto a las reglas durante la versificación. Eso es mucho menos evidente con respecto a las reglas engendradoras.

2. Sin embargo, existía, por lo menos, un sistema poético, en el cual las reglas engendradoras ocupaban un lugar importante.

Uno de los elementos esenciales de la poesía de los escaldos (islándica antigua) fueron las fórmulas especiales que se denominaban *kennings*. El kenning es una expresión que puede sustituir una palabra. Por ejemplo,

"ventisca de lanzas"	es un kenning	de "batalla"
"árbol de batalla"		de "guerra"
"arbusto del casco"		
"lanzador de espada"	son kennings	de "varón"
"donador de oro"		de "hombre"
"mar del carro"	es un kenning	de "tierra"
"fuego de guerra"	es un kenning	de "oro"
"cielo de arena"		
"campo de la foca"	son kennings	de "mar", etc.

El kenning simple es un kenning, ninguna parte del cual es kenning. Los ejemplos citados arriba son kennings simples. Ellos desempeñan el papel de axiomas, y, por lo visto, sólo grandes poetas tienen el derecho de crear nuevos kennings simples. Para el destino de los poetas no grandes queda la creación de nuevos kennings según las reglas de deducción. La regla de deducción de un kenning nuevo de los existentes es tal: cualquier palabra en uno de los kennings dados puede ser reemplazada por su kenning (no obligatoriamente simple). He aquí un ejemplo del kenning complicado con su descifrado (ejemplo real):



Leonid Martínov entendió los kennings como metáforas (equivocación profunda aunque perdonable. Los papeles estructurales de los kennings y metáforas en los distintos sistemas poéticos son totalmente diferentes) y escribió una poesía «Canciones de los escaldos», la cual termina así:

... ¿Puede ser que los traductores han embrollado algo?
¡No ¿Es posible que en la actualidad viven
algunos lanzadores de fuego de ventisca de bruja de la luna del caballo
de comertizos de barcos o
disipadores de ámbar de la tierra fría del jabalí gigantesco?
¡Todo es posible!

¿Y quién puede afirmar con seguridad
De que ahora no hay canciones que pueden llamarse
Oleaje de levaduras de la gente de huesos del fiordo?
¿Puede ser que actualmente haya tales canciones, quién sabe?

Después de esto la observación profesional de M. I. Steblin-Kamenski, de cuyo libro «Cultura de Islandia» [27] se han tomado los ejemplos, suena de un modo poco enfriador: «Cualquier kenning del guerrero, o varón, como regla general, fue no más rico en contenido que el pronombre «él» ».

EJERCICIOS:

a) Restablecer los kennings simples que integran la conclusión de los dos últimos kennings citados por Martínov.

b) Construir kennings de longitud máxima que pueden ser deducidos de los citados en el texto. Demostrar que no se puede deducir kennings más largos.

6. Teorema de Gödel de la completitud

6.1. Sea L un cierto lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$; φ, su interpretación; T_φL, conjunto de fórmulas φ-ciertas. En el § 3 se ha mostrado que el conjunto T_φ L es de Gödel, es decir, está completo, no contiene contradicción, está cerrado con respecto a la deducción y contiene todos los axiomas lógicos AxL.

El objetivo principal de este párrafo es demostrar el resultado inverso (Gödel):

6.2. Teorema. a) *Todo conjunto gödeliano* T *es un conjunto de todas las fórmulas* φ*-ciertas* T_φL *para la interpretación adecuada de* L *en cierto conjunto* M *de potencia* $\leqslant$ card (*alfabeto de* L) +

$+ \varkappa_0$ (*aquí y a continuación se tiene en cuenta la potencia del alfabeto sin las variables*: compárese con 2.12).

b) *Todo conjunto de fórmulas no contradictorio* ε, *contiente* AxL, *puede ser encajado en el conjunto gödeliano.*

El modelo M que se construirá en la demostración consta de las expresiones en cierta extensión del alfabeto L, es decir, es de carácter un poco artificial. En el párrafo que viene a continuación se mostrará que, una vez dada una interpretación natural (M, φ) del lenguaje L, se puede escoger de ella un submodelo de potencia $\leqslant$ card (alfabeto L) $+ \varkappa_0$.

6.3. Corolario (criterio de la deductividad). *Sea* $\varepsilon \supseteq$ AxL.

a) *La fórmula* P *puede ser deducida de* ε *cuando y sólo cuando ora* ε *sea contradictorio, ora* P *sea* φ*-cierta para todos los modelos* φ *del conjunto* ε *de potencia* $\leqslant$ card (*alfabeto* L) $+ \varkappa_0$.

b) *La fórmula* P *no depende de* ε *cuando y sólo cuando* $\varepsilon \cup \{P\}$ y $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ *no sean contradictorios, o, lo que es lo mismo según el teorema* 6.2, *cuando* $\varepsilon \cup \{P\}$ y $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ *tienen modelos.*

A continuación omitiremos a menudo la verificación de la existencia de distintas conclusiones formales. Si el lector quiere completarlo, es casi siempre más fácil establecer la deductividad con la ayuda del criterio 6.3 que directamente.

DEMOSTRACIÓN. a) Si ε es contradictorio, entonces de ε se deduce cualquier fórmula (proposición 4.2). Sea ε no contradictorio y sea $P\varphi$-cierta para todos los modelos de ε. Para la demostración de $\varepsilon \vdash$ P examinemos dos casos.

a_1) $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ *es contradictorio.* Entonces $\varepsilon \cup \{\neg P\} \vdash P$, de donde según el lema de la deducción 4.5 $\varepsilon \vdash \neg P \to P$. La tautología $(\neg P \to P) \to P$ y MP proporcionan $\varepsilon \vdash P$.

a_2) $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ *no es contradictorio.* Entonces según el teorema 6.2 el conjunto $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ tiene un modelo; en él ε es cierto y P, falsa, así que este caso no puede tener lugar.

b) Supongamos que P no depende de ε, es decir, P y $\neg P$ no pueden ser deducidas. Entonces por el resultado del p. 6.3a existe un modelo de ε, en el cual P es cierta, y un modelo de ε, en el cual P es falsa. Lo contrario es evidente.

Ahora procedamos a la demostración del teorema de Gödel.

6.4. Definición. *Sea* ε *un conjunto de fórmulas del lenguaje* L. *Se denomina suficiente para* ε *el alfabeto del lenguaje* L, *si para cada fórmula* $P(x)$ *continente exactamente una variable* x *libre, existe una constante* c_P *(que depende de* P*), tal que la fórmula*

$$R_P : \neg \forall x P(x) \rightarrow \neg P(c)_P)$$

pertenece a ε.

Sentido intuitivo de R_P : «si no todas las x poseen la propiedad de P, se puede señalar un objeto concreto c_P que no posee esta propiedad».

La terminología «suficiencia del alfabeto» está relacionada con lo que, en caso de carencia de fórmulas tipo R_P en ε, podemos simplemente aumentar ε, agregando todas las R_P, y si no bastan las constantes c_P, nos veremos obligados a agregarlas al alfabeto del lenguaje.

El plan de demostración del teorema 6.2 consiste en lo siguiente. Primeramente estableceremos que es justo el siguiente

6.5. Lema fundamental. *Si el conjunto* ε *de fórmulas del lenguaje no es contradictorio, es completo, contiene* AxL *y el alfabeto de* L *es suficiente para* ε, *entonces existe un modelo* ε *de potencia* $\leqslant$ card *(alfabeto de* L) $+ \aleph_0$.

Los dos lemas siguientes permiten encajar cualquier ε no contradictorio en el conjunto completo o tal, para el cual el alfabeto sea suficiente.

6.6. Lema. *Si* ε *no es contradictorio y contiene* AxL, *entonces existe un conjunto completo de fórmulas* $\varepsilon' \supseteq \varepsilon$ *no contradictorio.*

6.7. Lema. *Si* ε *no es contradictorio y contiene* AxL, *entonces existen:*

a) *un lenguaje* L′, *cuyo alfabeto se obtiene del alfabeto de* L *agregándole un conjunto de nuevas constantes de potencia* $\leqslant$ card (*alfabeto de* L) $+ \aleph_0$

b) *un conjunto de fórmulas* ε' *del lenguaje* L′, *no contradictorio, continente* ε *y* AxL′, *y tal que el alfabeto de* L′ *es suficiente para* ε'.

No obstante, estas construcciones molestan una a otra. Completando el conjunto ε, para el cual el alfabeto fue suficiente, podemos obtener un conjunto con alfabeto insuficiente, y agregando nuevas constantes, aumentamos la reserva general de fórmulas en el lenguaje alterando la completitud de los viejos conjuntos.

Por eso habrá que por turno procesar las construcciones 6.5 y 6.6 un número de veces numerable para demostrar, al fin y al cabo, el último

6.8. Lema. *Si* $\varepsilon \supseteq$ AxL *no es contradictorio, entonces existen:*

a) *un lenguaje* $L^{(\infty)}$, *cuyo alfabeto se obtiene, agregando al alfabeto* L *un conjunto de nuevas constantes de potencia* $\leqslant$ card (*alfabeto de* L) $+ \aleph_0$;

b) *un conjunto de fórmulas* $\varepsilon^{(\infty)}$ *en el lenguaje* $L^{(\infty)}$, *completo, no contradictorio, continente* ε *y* $AxL^{(\infty)}$ *y tal, que el alfabeto de* $L^{(\infty)}$ *es suficiente para él.*

Después de que sea demostrado el lema 6.8, se obtendrá el teorema 6.2 a partir del lema fundamental, si se aplica a $\varepsilon^{(\infty)}$ y si luego se limita el modelo obtenido sobre L y ε.

Procedamos ahora a la demostración de los lemas. El lema principal será demostrado en el p. 6.9, los lemas 6.5—6.7, en los pp. 6.10—6.12.

6.9. DEMONSTRACIÓN DEL LEMA PRINCIPAL. Comencemos por la construcción explícita de la interpretación φ del lenguaje L que resulte de modelo para ε.

a) Llamemos *término constante* a tal término en L que no contenga símbolos de variables. Pongamos luego que M = «segundo ejemplar» del conjunto de términos constantes del lenguaje = $\{\overline{t} \mid t$ son términos constantes$\}$ y definamos las *aplicaciones primarias* de la interpretación φ del lenguaje L en M por las condiciones:

$\varphi(c) = \overline{c}$ para cualquier constante c;

$\varphi(f)(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_r}) = \overline{f(t_1, \ldots, t_r)}$

para cualquier símbolo de la operación del rango r y cualesquiera términos constantes;

$\langle\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_r}\rangle \in \varphi(p)$,

si y sólo si $p(t_1, \ldots, t_r) \in \varepsilon$ (para cualquier relación p del rango r y términos constantes $t_1, \ldots, t_r$).

Demostremos ahora lo siguiente.

b) *Afirmación.* Sea P una fórmula cerrada. Tenemos $|P|_\varphi = 1$ cuando y sólo cuando $P \in \varepsilon$. (De aquí ya se deducirá que φ es un modelo de ε. En efecto, si $P \in \varepsilon$ no es cerrada, su clausura $\forall x_1 \ldots \forall x_n P$ puede ser deducida de ε con ayuda de Gen y, en virtud de la completitud y el carácter no contradictorio de ε, debe contenerse en ε. En virtud de la afirmación, $|\forall x_1 \ldots \ldots \forall x_n P|_\varphi = 1$, de donde $|P_\varphi| = 1$.)

DEMONSTRACIÓN de la afirmación b). Procedamos por inducción sobre el número general de cuantificadores y conectivas en la fórmula P. Escribiremos $|P|$ en lugar de $|P|_\varphi$.

b_1) P es una fórmula elemental $p(t_1, \ldots, t_n)$. La afirmación se infiere de la definición $|P|$ y la lista de aplicaciones primarias, porque del carácter cerrado de P se deduce que los términos t_i son constantes.

b_2) $P = \neg Q$.

Si $|P| = 1$, entonces $|Q| = 0$ y $Q \notin \varepsilon$ según la suposición deductiva para Q en virtud de la completitud de $\neg Q \in \varepsilon$, o sea, $P \in \varepsilon$.

Si $|P| = 0$ entonces $|Q| = 1$ y $Q \in \varepsilon$, de donde $\neg Q \notin \varepsilon$ en virtud del carácter no contradictorio de ε.

b$_3$) $P = (Q_1 \to Q_2)$.

Primeramente mostremos que si $|P| = 0$, entonces $P \notin \varepsilon$. En efecto, en este caso $|Q_1| = 1$, $|Q_2| = 0$; por inducción $Q_1 \in \varepsilon$, $Q_2 \notin \varepsilon$; en virtud de la completitud de $\neg Q_2 \in \varepsilon$ la tautología $Q_1 \to (\neg Q_2 \to \neg(Q_1 \to Q_2))$ y dos MP proporcionan $\varepsilon \vdash \neg(Q_1 \to Q_2)$. Debido a la completitud las fórmulas cerradas que se deducen de ε están contenidas en ε; entonces, $\neg(Q_1 \to Q_2) = \neg P \in \varepsilon$, así que $P \notin \varepsilon$.

Ahora mostremos que si $P \notin \varepsilon$, entonces $|P| = 0$. En efecto, entonces en virtud de la completitud $\neg P = \neg(Q_1 \to Q_2) \in \varepsilon$. Las tautologías $\neg(Q_1 \to Q_2) \to Q_1$ y $\neg(Q_1 \to Q_2) \to \neg Q_2$ y MP proporcionan $\varepsilon \vdash Q_1$, $\varepsilon \vdash \neg Q_2$, de donde en virtud de la completitud $Q_1 \in \varepsilon$, $\neg Q_2 \in \varepsilon$. Según la suposición inductiva, $|Q_1| = 1$, $|Q_2| = 0$, de donde $|P| = |Q_1 \to Q_2| = 0$.

b$_4$) $P = Q_1 \vee Q_2$ o $Q_1 \wedge Q_2$.

Con ayuda de las tautologías que expresan $\vee$, $\wedge$ a través de $\to$, $\neg$, este caso se reduce a los anteriores y nosotros omitimos su análisis.

b$_5$) $P = \forall x Q$.

Si x no entra libremente en Q, entonces $|P| = 1$ equivale a $|Q| = 1$, o sea, según la suposición inductiva, $Q \in \varepsilon$. Esta inclusión, por su parte, equivale a la inclusión de $\forall x Q \in \varepsilon$ hacia un lado según Gen, hacia el otro, según el axioma de especialización con $t = x$ y MP.

Por eso suponemos a continuación que x entra libremente en Q.

Supongamos primeramente que $|P| = 1$, pero $P \notin \varepsilon$ y llegaremos a la contradicción.

Si $P \notin \varepsilon$, entonces $\neg P \in \varepsilon$, o sea, $\neg \forall x Q(x) \in \varepsilon$. Como el alfabeto de L es suficiente para ε, en ε está contenida la fórmula $\neg \forall x Q(x) \to \neg Q(c_Q)$. Aplicando MP obtenemos $\varepsilon \vdash \neg Q(c_Q)$, de donde, en virtud del carácter no contradictorio de ε, $Q(c_Q) \notin \varepsilon$. Según la suposición inductiva $|Q(c_Q)| = 0$ (¡$Q(c_Q)$ es cerrada!). Ello significa que $|P|(\xi) = 0$ para $\xi \in \bar{M}$, si $x^{\xi} = \bar{c}_Q$, lo que contradice a la suposición de que $|P| = 1$.

Supongamos ahora que $|P| = 0$, pero $P \in \varepsilon$, y llegaremos a la contradicción.

Como $|P| = 0$, para cierto $\xi \in \bar{M}$ tenemos $|Q|(\xi) = 0$. Hallemos el término constante t a partir de la con-

dición de que $x^{\xi} = \bar{t}$. Por lo visto, x no conecta t en Q, así que $0 = |Q(x)|(\xi) = |Q(t)|$, de donde $Q(t) \notin \varepsilon$ según la suposición inductiva, y $\neg Q(t) \in \varepsilon$ en virtud de la completitud.

Por otro lado, si $P \in \varepsilon$, o sea, $\forall x Q(x) \in \varepsilon$, entonces según el axioma de especialización $\forall x Q(x) \to Q(t)$ obtendremos $\varepsilon \vdash Q(t)$. Eso es incompatible con el carácter no contradictorio de ε según el resultado del párrafo anterior.

b_6) $P = \exists x Q$.

Este caso se reduce al anterior con ayuda del axioma que expresa $\exists$ por $\forall$ y la negación, y nosotros omitimos su análisis.

6.10. DEMONSTRACIÓN DEL LEMA 6.6. Para encajar el conjunto ε en el conjunto completo y no contradictorio ε', tendremos que hacer uso de la inducción transfinita o del lema de Zorn equivalente a ésta y del lema sobre la deducción para el lenguaje L demostrado en el p. 4.5 del cap. II.

El lema de Zorn se aplicará al conjunto

$$C\varepsilon = \begin{cases} \text{conjunto de conjuntos de fórmulas } \varepsilon' \text{ del lenguaje L,} \\ \text{contenientes } \varepsilon \text{ no contradictorios} \end{cases}$$

el cual está ordenado por la inclusión.

Verificación de las condiciones del lema de Zorn. Sea $\{\varepsilon'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un subconjunto linealmente ordenado en $C\varepsilon$ para cualesquiera α, $\beta \in I$ ora $\varepsilon'_\alpha \subseteq \varepsilon'_\beta$, ora $\varepsilon'_\beta \subseteq \varepsilon'_\alpha$. Entonces la reunión $\bigcup \varepsilon'_\alpha$ pertenece a $C\varepsilon$. En efecto, de otra manera $\bigcup \varepsilon'_\alpha$ sería contradictorio. Existiría una conclusión de contradicción del número de fórmulas finito. Conténganse éstas en $\varepsilon'_{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon'_{\alpha_n}$. Entre $\varepsilon'_{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon'_{\alpha_n}$ hay un conjunto que contiene los $n - 1$ restantes; este conjunto sería contradictorio contrariamente a la suposición.

Conclusión del lema de Zorn: en el conjunto $C\varepsilon$ existe un elemento maximal, es decir, tal conjunto no contradictorio $\varepsilon' \supseteq \varepsilon$ que si $Q \notin \varepsilon'$, entonces $\varepsilon' \cup \{Q\}$ es contradictorio.

Se afirma que ε' es completo. En efecto, supongamos que P es cerrada, $P \notin \varepsilon'$, $\neg P \notin \varepsilon'$ y llegamos a la contradicción. De que ε' es maximal se sigue que $\varepsilon' \cup \{P\} \vdash$ $\vdash R$, $\varepsilon' \cup \{\neg P\} \vdash R$, donde R es cualquier fórmula. Según el lema sobre la deducción $\varepsilon' \vdash P \to R$, $\varepsilon' \vdash$

$\vdash \neg P \to R$. La tautología $(P \to R) \to ((P \neg \to R) \to \to R)$ y MP brindan $\varepsilon' \vdash R$, lo que es incompatible con el carácter no contradictorio de ε'.

6.11. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6.7. Para construir un lenguaje con alfabeto suficiente para el conjunto de fórmulas ε' no contradictorio conteniente ε y Ax L′, procederemos de modo más natural.

a) Agreguemos al alfabeto del lenguaje L un conjunto de nuevas constantes de la misma potencia que el alfabeto L. Se obtendrá el lenguaje L′.

b) Examinemos el conjunto de fórmulas $\varepsilon \cup \cup$ Ax L′ en el lenguaje L′, donde Ax L′ son todos los axiomas lógicos del lenguaje L′. Este conjunto no es contradictorio. En efecto, si existiese una conclusión de contradicción de $\varepsilon \cup \cup$ Ax L en L′, entonces el procedimiento siguiente la convirtiera en una conclusión de contradicción de ε en L: tomemos el conjunto finito de todas las constantes nuevas que entran en las fórmulas de esta conclusión y sustituyamos estas constantes por las variables antiguas (de L) que no entran en estas fórmulas de esta conclusión. Es fácil comprobar que la conclusión de contradicción quedará siendo conclusión de contradicción y pasará totalmente en L.

c) En L′ tomaremos el conjunto de todas las fórmulas $P(x)$ que contienen no más que una única variable libre. Para cada una de tales fórmulas eligiremos una nueva constante c_P, definiremos la fórmula

$$R_P : \neg \forall x P(x) \to \neg P(c_P)$$

y pondremos definitivamente que

$$\varepsilon' = \varepsilon \cup \text{Ax L}' \cup \{R_P\}.$$

Por lo visto, queda verificar solamente que ε' no es contradictorio. Si de ε' se deduciese una

contradicción, se deduciría con participación del número finito de las fórmulas R_P. Por eso basta verificar que la adición de *una sola* fórmula R_P no puede llevar a la contradicción, si R_P se agrega al conjunto no contradictorio. Después de cambiar las notaciones, se puede considerar que $\varepsilon \cup \text{Ax L}'$ es este conjunto no contradictorio.

Supongamos lo contrario: $\varepsilon \cup \text{Ax L}' \cup \{R_P\}$ es contradictorio. Entonces, en particular, $\varepsilon \cup \cup \text{Ax L}' \cup \{R_P\} \vdash \neg R_P$ y según el lema sobre la deducción $\varepsilon \cup \text{Ax L}' \vdash R_P \to \neg R_P$. La tautología $(R_P \to \neg R_P) \to \neg R_P$ y MP proporcionan

$$\varepsilon \cup \text{Ax L}' \vdash \neg R_P = \neg (\neg \forall x P(x) \to \neg P(c_P)).$$

Haciendo uso de las tautologías $\neg (P \to \neg Q) \to \to P \wedge Q$, $P \wedge Q \to P$, $P \wedge Q \to Q$, obtenemos $\varepsilon \cup \text{Ax L}' \vdash \neg \forall x P(x)$, $\quad \varepsilon \cup \text{Ax L}' \vdash P(c_P)$. Mostraremos que en este caso el conjunto $\varepsilon \cup \cup \text{Ax L}'$ es contradictorio a pesar de la suposición.

En efecto, en la conclusión $P(c_P)$ de $\varepsilon \cup \cup \text{Ax L}'$ reemplazaremos siempre c_P por la variable y que no entra en esta conclusión. Obtendremos la conclusión $P(y)$ de $\varepsilon \cup \text{Ax L}'$. Después de eso Gen, el axioma de especialización, MP y de nuevo Gen llevarán a la conclusión $\forall x P(x)$.

6.12. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6.8. Sea L un lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$, ε un conjunto de fórmulas en él. Encajemos ε en el conjunto completo no contradictorio ε', luego aplicaremos a (L, ε') el lema 6.7. Denotemos el lenguaje y el conjunto de fórmulas obtenidas por L^*, ε^*, respectivamente. Pongamos, luego, por inducción

$$(\text{L}^{(0)}, \varepsilon^{(0)}) = (\text{L}, \varepsilon); \ (\text{L}^{(i+1)}, \varepsilon^{(i+1)}) = (\text{L}^{(i*)}, \varepsilon^{(i*)})$$

y por último,

$$L^{(\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{(i)}, \quad \varepsilon^{(\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{(i)}.$$

El conjunto $\varepsilon^{(\infty)}$ no es contradictorio, pues de otra manera la conclusión de contradicción se obtuviera en "el nivel finito", y todos los $\varepsilon^{(i)}$ fuesen no contradictorios. El conjunto es completo, ya que cada fórmula cerrada $L^{(\infty)}$ se inscribe en el alfabeto de $L^{(i)}$, para algún i, mientras que $\varepsilon^{(i+1)}$ contiene la completación de $\varepsilon^{(i)}$ en $L^{(i)}$. Por último, el alfabeto $L^{(\infty)}$ es suficiente para $\varepsilon^{(\infty)}$ por las mismas razones.

Con eso se finaliza la demostración de los lemas.

6.13. DEDUCCIÓN DEL TEOREMA 6.2 DESDE LOS LEMAS. Sea T un conjunto de fórmulas gödeliano en L. Aplicándole el lema 6.8, encajemos (L, T) en ($L^{(\infty)}$, $T^{(\infty)}$), donde el par ($L^{(\infty)}$, $T^{(\infty)}$) satisface el lema 6.5. Sea $\varphi^{(\infty)}$ la interpretación de $L^{(\infty)}$, cuya existencia afirma el lema 6.5. La potencia $M^{(\infty)}$ no es superior a card (alfabeto L) + + $\aleph_0$. La restricción φ de la interpretación $\varphi^{(\infty)}$ sobre L satisface la condición $T \subseteq T_{\varphi}$L. Demostremos que $T = T_{\varphi}$L. En efecto, sea $P \in T_{\varphi}$L. Si P es cerrada, entonces $P \in T$, puesto que en virtud de la completitud ora P, ora $\neg P$ se encuentra en T, y lo segundo es incompatible con la φ-veracidad de P. Si ella no es cerrada y $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ son variables que entran libremente en P, entonces $\forall x_1 \ldots \forall x_n P$ es cerrada y pertenece a T. Según el axioma de especialización P puede ser deducida de $T \cup \{\forall x_1 \ldots \forall x_n P\}$, de donde $P \in T$ en virtud del carácter cerrado de T con respecto a las conclusiones.

Ello demuestra la primera afirmación del teorema.

La segunda procede del razonamiento análogo: aplicándola a ε en lugar de T, hallamos el modelo φ para ε; entonces $\varepsilon \subseteq T_\varphi$L y T_φL es gödeliano.

6.14. Señalemos en conclusión que si el alfabeto L contiene el símbolo $=$, para el cual en ε (o en T) están incluidos los axiomas de igualdad, entonces existe una interpretación normal que satisface el teorema 6.2 y que transfiere $=$ en igualdad. Para la demostración es necesario factorizar el modelo M arriba construido respecto de la equivalencia $\varphi(=)$, como en el p. 4.6.

7. Modelos numerables y paradoja de Skolem

«I know what you're thinking about», said Tweedledum, «but it isn't so, nohow». «Contrariwise», continued Tweedledee, «if it was so, it might be; if it were so, it would be: but as it isn't, it ain't. That's logic».

Lewis Carroll, Through the Looking Glass

7.1. En este párrafo se refiere la técnica de «acortamiento de modelos», en particular, para L_1 Set.

Sea L un lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$, sean $M \subseteq N$ dos conjuntos (o clases en V) y φ, ψ intepretaciones de L en M, N, respectivamente, concordadas en el sentido evidente de la palabra, así que ψ es una extensión de φ.

Las clases de interpretación $\bar{M}$, $\bar{N}$ están encajadas de manera natural: $\bar{M} \subseteq \bar{N}$.

7.2. Definición. *La fórmula P del lenguaje* L *se llama (M, N)-absoluta, si para todos los $\xi \subseteq \bar{M}$ tenemos*

$$|P|_M(\xi) = |P|_N(\xi).$$

Nosotros escribimos $||_M$ en lugar de $||_\varphi$, etc.

La propiedad de lo absoluto suele usarse así: si P es absoluta y, además, N-cierta, entonces ella notoriamente es M-cierta. He aquí el mecanismo estándar de trastorno del carácter absoluto: si la fórmula $\exists x Q(x)$ es N-cierta, quiere decir que N tiene un objeto con la propiedad de Q, pero en M tal objeto puede no existir. La demostración del hecho siguiente describe, cómo se ha de luchar contra esto.

7.3. Proposición. *Sean* ε *un conjunto de fórmulas del lenguaje* L; ψ, *la interpretación de* L *en* N *y* $M_0 \subseteq N$, *cierto subconjunto. Existe un conjunto* $M, M_0 \subseteq M \subseteq N$, *de potencia* $\leqslant \operatorname{card} M_0 + \operatorname{card} \varepsilon + \aleph_0$, *tal que todas las fórmulas de* ε *son* (M, N)-absolutas.

7.4. Corolario (Löwengheim — Skolem). *Si el alfabeto de* L *es numerable y* N *es un modelo de* ε, *entonces existe en* N *un submodelo numerable de* ε.

(Se puede construirlo, habiendo conservado el carácter absoluto de todas las fórmulas de L, en particular, la veracidad de todas las fórmulas que fueron ciertas.)

DEMOSTRACIÓN. Sea ya definido el conjunto $M_i \subseteq N$, $i \geqslant 0$. Pongamos

$$M_{i+1} = M_i \cup \{x^{\xi'} \mid \xi' = \xi'(x, P, \xi)\},$$

donde x recorre las variables de L; P son subfórmulas de las fórmulas de ε; ξ son puntos de $\overline{M}_i$, y en el trío fijo (x, P, ξ) ξ es alguna variación única de ξ sobre x con la propiedad $|P|_N(\xi') = 1$, si existe; en caso contrario (x, P, ξ) no hace ninguna aportación a M_{i+1}.

Pongamos luego $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$. La afirmación sobre la potencia de M es evidente. Mostremos ahora que todas las subfórmulas de las fórmulas de ε son (M, N)-absolutas. Procederemos

por recurrencia sobre el número de cuantificadores en la fórmula. Para las fórmulas elementales es evidente el resultado; está obvio también el paso inductivo que corresponde a la construcción de nueva fórmula con ayuda de las conectivas. El cuantificador $\forall$ se reduce de modo estándar a $\exists$.

Pues bien, sea P absoluta. Establezcamos el carácter absoluto de $\exists xP$. Es suficiente considerar que x entra libremente en P. Para $\xi \in \overline{M}$ tenemos:

$$|\exists xP|_N(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ si existe } \xi' \in \overline{N}, \text{ variación } \xi \\ \text{sobre } x, \text{ con} \\ |P|_N(\xi') = 1, \\ 0 \text{ en los demás casos;} \end{cases}$$

$$|\exists xP|_M(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ si existe } \xi'' \in \overline{M}, \text{ variación } \xi \\ \text{sobre } x, \text{ con} \\ |P_M|(\xi'') = 1, \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Pero las condiciones detrás de la llave son equivalentes. En efecto, existe una variación η del punto ξ sobre las variables que no entran libremente en P, tal que $\eta \in M_i$ para el i conveniente. Entonces, en el caso de $|\exists xP|_N(\xi) = |\exists xP|_N(\eta) = 1$ existe $\xi' \in \overline{N}$ con $|P|_N(\xi') = 1$ existe $\eta' \in M_{i+1}$ con $|P|_N(\eta') = |P|_M(\eta') = 1$, η' es la variación de η sobre x en virtud de la construcción de M_{i+1} y la suposición inductiva. Eso demuestra lo requerido.

7.5. Apliquemos ahora el corolario 7.4 a la interpretación estándar de L_1 Set en el universo de von Neumann V y al conjunto ε de los axiomas de Zermelo — Fraenkel. Obtendremos un modelo N numerable para este sistema de axiomas que, no obstante, tendrá una deficiencia;

si $X \in N$, algunos elementos de X puedan no pertenecer a N, es decir, N no será transitiva. El resultado de Mostowski que viene a continuación muestra, cómo se ha de reemplazar N por un modelo numerable transitivo.

Sea $N \subseteq V$ cierta subclase, $\varepsilon \subseteq N \times N$, una relación binaria en ella. Escribiremos $X \varepsilon Y$ en lugar de $\langle X, Y \rangle \in \varepsilon$. Para cualquier $X \in N$ pongamos

$[X] = \{Y \mid Y \varepsilon X\}$.

Supongamos que $[X] \in V$ para todos los $X \in N$, es decir, que $[X]$ son conjuntos y no clases. Analicemos la interpretación φ del lenguaje L_1 Set en la clase N, para la cual $\varphi(\in)$ es ε y $\varphi(=)$, una igualdad.

7.6. Proposición (Mostowski). *Supongamos que los axiomas de extensión y del conjunto vacío son φ-ciertos y en N no hay cadena infinita $X_n \varepsilon X_{n-1} \varepsilon \ldots$ $\ldots \varepsilon X_1 \varepsilon X_0$.*

Entonces existe una única clase transitiva $M \subseteq V$ y un único isomorfismo $f: (N, \varepsilon) \rightleftarrows (M, \in)$.

Aplicando esta afirmación al modelo numerable $(N, \in)$ de los axiomas de Zermelo — Fraenkel del p. 7.5, hallaremos el modelo numerable transitivo $(M, \in)$, un «pequeño universo». (La condición sobre la ruptura de las cadenas ha sido cumplida no sólo en N, pero también en V; $[X]$ es el subconjunto $X \cap N \subseteq X$ y por eso es elemento de V.)

7.7. DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 7.6. Para cada ordinal α construiremos por recursión transfinita (véase el apéndice «Universo de von Neumann») conjuntos $N_\alpha \subseteq N$, $M_\alpha \subseteq V$, isomorfismos concordados f_α: $(N_\alpha\ \varepsilon|_{N_\alpha}) \rightleftarrows (M_\alpha, \in|_{M_\alpha})$ y mostraremos que $\bigcup N_\alpha = N$.

a) De la φ-veracidad del axioma de extensión y de lo que $\varphi(=)$ es una igualdad obtenemos sin dificultad $X_1 = X_2 \Longleftrightarrow [X_1] = [X_2]$ para todos los $X_1, X_2 \in N$. Sea $\varnothing_N \in N$ la interpretación de la constante $\varnothing$ del lengua-

je L_1 Set. Según la observación hecha, tomando en consideración la veracidad del axioma del conjunto vacío, hallamos que $\varnothing_N$ es el único elemento de N, para el cual $[\varnothing_N] = \varnothing \in V$. Pongamos:

$$N_0 = \{\varnothing_N\}, \quad M_0 = \{\varnothing\}; \quad f_0(\varnothing_N) = \varnothing.$$

b) CONSTRUCCIÓN RECURSIVA. Sea α un ordinal. Supongamos que N_α, M_α, f_α ya están construidos. Pongamos:

$$N_{\alpha+1} = \{X \in N \mid [X] \subseteq N_\alpha \wedge X \notin N_\alpha\} \cup N_\alpha;$$

$$f_{\alpha+1}(X) = \{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X]\} \quad \text{para} \quad X \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha;$$

$$f_{\alpha+1}|_{N_\alpha} = f_\alpha;$$

$$M_{\alpha+1} = \text{imagen } f_{\alpha+1}.$$

Si β es un ordinal límite, pongamos

$$N_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} N_\alpha; \quad M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha; \quad f_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} f_\alpha.$$

Por último, pongamos $M = \bigcup M_\alpha$, $f = \bigcup f_\alpha$ según todos los ordinales.

c) DEMOSTRACIÓN INDUCTIVA. Verificaremos que para cada α:

c_1) N_α es un conjunto, o sea, $N_\alpha \in V$,

c_2) M_α es un subconjunto transitivo V,

c_3) f_α es un isomorfismo $N_\alpha \subset M_\alpha$, que transfiere ε en $\in$;

c_4) $N = \bigcup_{\alpha} N_\alpha$.

Las afirmaciones c_1)—c_3) para $\alpha = 0$ son evidentes. Si son ciertas para todos los $\alpha < \beta$ y β es un ordinal límite, entonces son ciertas también para β. Queda hacer el paso de α a $\alpha + 1$.

c_1) Por lo visto, [ ] es una función de $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ en $\mathcal{P}(N_\alpha)$; en virtud de la veracidad del axioma de extensión existe una función inversa. Su imagen $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ es un conjunto, puesto que N_α y, por consiguiente, $\mathcal{P}(N_\alpha)$ según la suposición inductiva es un conjunto.

c_2) Cualquier elemento de $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$ tiene un aspecto de $\{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X]\}$, donde $X \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$, pero entonces $[X] \subseteq N_\alpha$. Entonces, el elemento $f_\alpha(Y)$ de este elemento $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$ pertenece a la imagen f_α, es decir, al conjunto $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$. Esto demuestra el carácter transitivo de $M_{\alpha+1}$.

c_3) Verifiquemos primeramente que $f_{\alpha+1}$ es una biyección. El carácter sobreyectivo es evidente; haciendo

uso de la suposición inductiva, nos convencemos de que es suficiente comprobar el carácter inyectivo en $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$. Pero si $X_1, X_2 \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ y $f_{\alpha+1}(X_1) = f_{\alpha+1}(X_2)$, entonces $\{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X_1]\} = \{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X_2]\}$. Haciendo uso del carácter inyectivo de f_α, obtenemos $[X_1] = [X_2]$, de donde $X_1 = X_2$.

Después de eso hallamos

$$Y \varepsilon X \Leftrightarrow Y \in | X | \Rightarrow f_\alpha(Y) \in f_{\alpha+1}(X);$$

por eso para $X \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ la relación $Y \varepsilon X$ pasa en $f(Y) \in f(X)$. Eso, por lo visto, es suficiente para finalizar la inducción.

c$_4$) Verifiquemos, por último, que $N = \bigcup N_\alpha$. Sea $N' = N \setminus \bigcup N_\alpha$, supongamos que N' no es vacío y lleguemos a la contradicción.

Si existe $X \in N'$ tal que $[X] \cap N' = \varnothing$, entonces $[X] \cap N \subseteq \bigcup N_\alpha$; entonces $[X] \subseteq N_{\alpha_0}$ para cierto α_0 y, entonces, $X \in N_{\alpha_0+1}$, en contra de la condición $X \in N \setminus \bigcup N_\alpha$. Pero si para todos los $X_0 \in N'$ tenemos $[X_0] \cap N' \neq \varnothing$, entonces, eligiendo sucesivamente $X_{n+1} \in [X_n] \cap N'$, obtenemos una cadena infinita $\ldots X_{n+1} \varepsilon N_n \varepsilon \ldots \varepsilon X_0$, en contra de la condición del teorema.

d) Supongamos que hay dos subclases transitivas M, M' e isomorfismo $g: (M, \in) \tilde{\to} (M', \in)$. Pongamos $M_\alpha = V_\alpha \cap M$, $M'_\alpha = V_\alpha \cap M'$. Entonces la inducción evidente por α muestra que g es una aplicación idéntica.

La proposición queda demostrada.

7.8. Paradoja de Skolem. Sea M un modelo de axiomas de Zermelo — Fraenkel numerable transitivo. En este caso son M-ciertas las fórmulas siguientes:

el axioma de la infinidad;

el axioma de la potencia;

el teorema de Cantor acerca de la ausencia de aplicaciones de x sobre $\mathcal{P}(x)$ para cualquier conjunto x (se puede deducirlo de los axiomas de Zermelo — Fraenkel).

Como $\mathcal{P}(X)$ no es numerable, siendo X numerable, ha de diferir fuertemente el contenido de la afirmación acerca de la M-veracidad

del axioma de la potencia en el modelo numerable M del contenido de la afirmación acerca de su V-veracidad.

En efecto, sea en L_1 Set "$y = \mathcal{P}(x)$" la abreviatura de la fórmula $\forall z$ ("$z \subseteq x$" $\leftrightarrow z \in y$). Sea $\xi \in \overline{M}$, $x^{\xi} = X \in M$, $y^{\xi} = Y \in M$. Entonces, como es fácil cerciorarse

$$| \text{"}y = \mathcal{P}(x)\text{"} |_M (\xi) = 1 \Longleftrightarrow Y = \{Z \mid Z \subseteq X, Z \in M\},$$

es decir, el papel de $\mathcal{P}(X)$ en M lo desempeña $\mathcal{P}(X)_M = \mathcal{P}(X) \cap M$. En este caso $\mathcal{P}(X)_M$ no es sino numerable, ya que M es numerable, y desde el punto de vista habitual, la aplicación del X numerable sobre $\mathcal{P}(X)_M$ existe. Esto no contradice al teorema de Cantor, porque su M-veracidad acarrea solamente la ausencia de tales aplicaciones (gráficos) en el modelo M. Fuera de éste ellos pueden sin duda alguna existir, pero, agregando uno de ellos a M (y todo lo que sea necesario agregar para conservar la veracidad de los axiomas), aumentamos M y, juntamente con eso, $\mathcal{P}(X)_M$, y la aplicación agregada deja de ser aplicación sobreyectiva.

Todos estos efectos de variación del sentido de los enunciados de la teoría de conjuntos en los modelos numerables suelen denominarse paradoja de Skolem.

Cohen fue el primero quien logró aprovechar las propiedades de los modelos numerables para demostrar la imposibilidad de deducir la hipótesis del continuo. En sus modelos entre ω_0 y $\mathcal{P}(\omega_0)_M$ se encuentran los conjuntos de la potencia «M-intermedia», aunque desde el punto de vista exterior tanto ω_0, como $\mathcal{P}(\omega_0)_M$ y todos los demás conjuntos son simplemente numerables.

Pero agregó una idea fundamentalmente nueva acerca de la relativización del propio concepto de veracidad, y sólo post factum se puede imaginar con tal simplicidad el estado de los asuntos en sus modelos (véanse los detalles en el cap. III).

Skolem mismo y otros especialistas de los fundamentos de las matemáticas listos a trabajar con las infinidades numerables, pero no mayores, consideraban la paradoja de Skolem como manifestación del carácter relativo de los conceptos teóricos de conjunto. En particular, existen «diversos continuos» $\mathcal{P}(\omega_0)_M$ de los cuales ninguno coincide con el «verdadero» $\mathcal{P}(\omega_0)$.

Desde el punto de vista del topólogo o analista, para el cual el continuo es una realidad operacional, la existencia de sus modelos numerables significa simplemente pobreza del lenguaje formal como medio de imitación de los razonamientos no formales. Nosotros ya tropezamos con semejantes restricciones al examinar los axiomas formales de inducción en el § 4.

Es posible que para un psicólogo o filósofo de la ciencia lo más interesante sea lo que cualquier matemático puede entender el punto de vista de otro (aunque no esté obligado a conformarse con él). Eso significa que el habla del matemático *A*, demostrablemente incapaz de llevar una información inequívoca sobre el continuo, de todas maneras está capaz de poner el cerebro del interlocutor *B* en el estado cuando éste forma una idea sobre el continuo adecuada a la que hay en el cerebro de *A*. Después de esto *B* tiene el derecho de rechazar dicha idea.

«Yo sé lo que piensas tú —le dijo Trulalá a Alisa—, pero eso no es así, sino todo lo contrario».

8. Extensiones del lenguaje

8.1. En este párrafo se estudia la variante formal de la «introducción de nuevas notaciones». Al hacerlo, nos limitaremos a analizar sólo los nombres de tales funciones y constantes nuevas que «demostrablemente pueden ser expresadas» en el lenguaje. Su añadidura al alfabeto reduce las conclusiones formales e inscripciones de las fórmulas, pero no aumenta el conjunto de las fórmulas que se pueden deducir, en que, propiamente dicho, consistirá el teorema fundamental.

Desde luego, en la práctica tanto la abreviación de las inscripciones como los acertados nombres nuevos en seguida hacen accesibles a la inducción dominios enteros de hechos que anteriormente han quedado fuera de sus límites. Los grupos descubiertos por Galois en la teoría de ecuaciones es uno de los ejemplos más conocidos. Hilbert en 1923 habló con escepticismo de la tentativa de suspender la inflación en Alemania con la introducción de nueva unidad monetaria Rentenmark: «No se puede resolver el problema, habiendo cambiado de nombre una variable independiente». Como notó su biógrafo Constance Reid [30], no tenía razón: la situación económica se estabilizó gradualmente.

Nosotros trabajaremos con los datos siguientes.

8.2. Sea L′ cierto lenguaje de la clase $\mathcal{L}_1$ co4 una igualdad y un conjunto de variables infiniton sea $P'(x)$ una fórmula en L′, en la cual x entra, libremente. Recordemos que la inscripción abreviada $\exists!\, xP'$ (léase: «existe un único x con la propiedad de P») se refiere a la fórmula

$$\exists x P'(x) \wedge \forall x \forall y\, (P'(x) \wedge P'(y) \rightarrow x = y).$$

Sea ε' un cierto conjunto de fórmulas del lenguaje que contenga AxL′, axiomas de la igualdad y, posiblemente, axiomas especiales adicionales. Supongamos que de ε' puede ser deducida la fórmula $\exists!\, xP'(x, y_1, \ldots, y_n)$, donde en P' no hay variables libres, salvo $x, y_1, \ldots, y_n$. En una interpretación no formal esto significa que la fórmula P' determina x como una función implícita de $y_1, \ldots, y_n$, y en un texto no formal tenemos el derecho de introducir para esta función nueva notación, digamos $x = f(y_1, \ldots, y_n)$ y a continuación hacer uso de ella.

He aquí la variante formal de este procedimiento.

8.3. Proposición. *En condiciones del p. 8.2 denotemos por* L *un lenguaje de la clase* $\mathscr{L}_1$, *cuyo alfabeto se obtiene del alfabeto de* L′ *por añadidura de nuevo símbolo de la operación* f *de rango* n, *si* $n \geqslant 1$, *o de la constante* f, *si* $n = 0$.

Sea ε *el menor conjunto de las fórmulas* L *que contenga* AxL, *axiomas de la igualdad,* ε' *y la fórmula* $P'(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$.

Entonces existe una aplicación, que se describe explícitamente, del conjunto de fórmulas del lenguaje L *(rico) en el conjunto de fórmulas del lenguaje* L′ *(pobre)* que a la *fórmula* Q *le confronta su traducción* Q' *con las propiedades siguientes:*

a) *si* f *no entra en* Q, *entonces la traducción de* Q *coincide con* Q;

b) *si* Q *puede ser deducida de* ε *en* L, *entonces* Q' *puede ser deducida de* ε' *en* L′.

En particularidad, el conjunto de fórmulas de L′ *que se deducen de* ε' *en* L′ *coincide con el conjunto de fórmulas de* L *que no contienen* f *y que se deducen de* ε *en* L.

DEMOSTRACIÓN. *Traducción de las fórmulas.* Sea $n \geqslant 1$ (el caso de $n = 0$ se analiza análogamente, pero más sencillamente y lo omitimos).

La adición de f se manifiesta ante todo en el aumento del conjunto de términos: en el lenguaje L hay términos $f(t_1, \ldots, t_n)$, donde f, a su vez, puede entrar en $t_1, \ldots, t_n$, etc. Para disminuir la cantidad de menciones de f al pronunciar $f(t_1, \ldots, t_n)$, uno se ve obligado a hablar con circunloquios: «tal x que $P(x, t_1, \ldots, t_n)$». Y eso es la idea fundamental de la traducción de las fórmulas. Daremos ahora la definición inductiva y precisa.

a) El término $f(t_1, \ldots, t_n)$ se llama f-término simple si f no entra en $t_1, \ldots, t_n$.

b) Sea Q una fórmula elemental en L. Si f no entra ne Q, la denominaremos su propia traducción. Si f entra en Q, entonces existe un simple f-término $f(t_1, \ldots, t_n)$ que entra en Q. Tomemos la primer entrada del f-término sencillo en Q, elijamos el símbolo de la variable x que no entra en Q, introduzcámoslo en vez de esta entrada obteniendo la fórmula Q^* y construyamos la fórmula

$$Q_1': \exists x (P(x, t_1, \ldots, t_n) \wedge Q^*(x)).$$

Aplicando este procedimiento a $Q'_{(1)}$, obtendremos $Q_{(2)}$, etc. Después del número finito de pasos se obtendrá la fórmula $Q'_{(i)} = Q'$, en la cual f no entra, y ella será la traducción de Q.

c) Si Q no es una fórmula elemental, tiene una forma de $\neg Q_1$ o $Q_1 \divideontimes Q_2$ ($\divideontimes$ es una conectiva), o $\forall y Q_1$, o $\exists y Q_1$. En todos esos casos la traducción de Q se obtiene automáticamente de las traducciones de sus partes integrantes: «agregando una virgulilla».

Traducción de las deducciones. La tarea consiste en lo siguiente: sea $Q_1, \ldots, Q_n = Q$ la conclusión Q de ε y sea Q' la traducción de Q. Es necesario construir la conclusión Q' de ε'. La primer idea que le ocurre a uno es construir una sucesión de traducciones $Q_1', \ldots, Q_n'$. ¿Por qué puede no ser conclusión Q de ε, aunque MP y Gen se traducen de manera trivial, y las tautologías por tautologías? Porque en algunos lugares puede estar, por ejemplo, el axioma lógico $\forall x R(x) \to R(t)$, el cual, después de ser traducido, deja de ser axioma, si f entra en R. Por consiguiente, tenemos que completar la sucesión $Q_1', \ldots, Q_n'$ por las conclusiones de algunos sus

miembros intermedios de ε' para convertirla en la conclusión Q'. Eso es un procedimiento combinatorio bastante voluminoso, con el cual se puede familiarizarse en el libro de Cleene [3, § 74]. (La moraleja de lo expuesto consiste en que nuevas notaciones ahorran en realidad tiempo y lugar.)

En lugar de eso demostraremos no efectivamente la deductividad de $\varepsilon' \vdash Q'$ con ayuda del criterio de la deductividad del p. 6.3. Formulémoslo una vez más:

a) *Si Q' es cierta en cualquier modelo de ε', entonces* $\varepsilon' \vdash Q'$. Como en ε' están contenidos axiomas de la igualdad, podemos un poco reforzar este criterio;

b) *Si Q' es cierta en cualquier modelo normal de ε', entonces Q es cierta en cualquier modelo de ε'.*

Recordemos que en el modelo normal «=» se interpreta como una igualdad. Por otra parte, como se muestra en el § 4, «=» se interpreta en cualquier modelo como una relación de equivalencia compatible con la interpretación de todas las constantes, funciones y sus relaciones. La factorización por ella lleva al modelo normal, quedando invariables los valores de veracidad de todas las fórmulas.

c) *Los modelos normales de ε' (en el lenguaje* L'*) coinciden con los modelos normales de ε (en el lenguaje* L).

Con más precisión, entre ellos se establece la siguiente correspondencia natural y biunívoca que conserva las funciones de la veracidad. Limitémonos al análisis del caso $n \geqslant 1$.

Sea φ una interpretación normal de L' en M, para la ual $|Q'|_\varphi = 1$ con todos los $Q' \in \varepsilon'$. En particular, por cuanto $\varepsilon' \vdash \exists! xP'$

$$|\exists! xP'(x, y_1, \ldots, y_n)|_\varphi = 1.$$

Caculando el valor de veracidad izquierdo en el punto $\xi \in \overline{M}$ y aprovechando la normalidad del modelo, obtenemos, según se deduce de aquí, que a cualquier $n = ke \langle y_1^\xi, \ldots, y_n^\xi \rangle \in M^n$ le responde el único valor $x^{\xi'} \in M$, tal que $|P'(x^{\xi'}, y_1^{\xi'}, \ldots, y_n^\xi)|_\varphi = 1$ (la inscripción es no estándar, pero el sentido es evidente).

Interpretaremos entonces f (un nuevo símbolo del lenguaje L) como función $M^n \to M$, la cual traduce $\langle y_1^\xi, \ldots, y_n^\xi \rangle$ en $x^{\xi'}$. Por lo visto, obtendremos el modelo normal ε en el lenguaje L.

Al revés, acotando cualquier modelo normal ε en L', obtendremos el modelo normal ε'.

d) *Si Q puede ser deducida de ε en L, entonces Q' es cierta en cualquier modelo normal ε'.*

En efecto, Q es cierta en cualquier modelo φ del conjunto ε. Para demostrar la veracidad de Q' comenzaremos por las Q elementales contenientes f.

En las notaciones de la primera parte de la demostración (traducción de las fórmulas) construiremos Q^* y luego $Q'_{(1)} = \exists x\,(P\,(x, t_1, \ldots, t_n) \wedge Q^*\,(x))$. Para verificar que $|\,Q'_{(1)}\,|_\varphi = 1$ es necesario para cada punto $\xi \in \overline{M}$ hallar una variación ξ' del punto ξ por x tal que $|\,P\,|_\varphi\,(\xi') = 1$, $|\,Q^*\,(x)\,|_\varphi\,(\xi') = 1$. Hallaremos $x^{\xi'}$ de la condición $|\,P\,(x^{\xi'}, t_1^{\xi'}, \ldots, t_n^{\xi})\,|_\varphi = 1$.

La descripción de la interpretación f dada en el punto c) muestra que entonces $|\,Q^*\,|_\varphi\,(\xi') = |\,Q\,|_\varphi\,(\xi) = 1$.

De este modo, el paso de Q a $Q'_{(1)}$ conserva su veracidad; iterándolo, hallamos que Q' es cierta para las Q elementales. Por último, la inducción por el número de conectivas y cuantificadores demuestra la veracidad de Q' en el caso general.

Reuniendo los resultados a) — d), obtenemos definitivamente que $\varepsilon' \vdash Q'$, lo que concluye la demostración de la proposición 8.3.

8.4. Ejemplos. a) En el lenguaje L_1 Set de los axiomas de la extensión y del par (así como de los axiomas de la igualdad y lógicos) puede ser deducida la fórmula

$$\exists! x \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v).$$

Haciendo uso de la proposición 8.3, nos persuadimos de que si se agrega a L_1 Set nuevo símbolo de la función del rango 2 —«par desordenado» { }—, el conjunto de fórmulas del lenguaje L_1 Set, las cuales se deducen de los axiomas de Zermelo — Fraenkel en esta extensión, no varía.

Por eso podemos tranquilamente emplear no sólo la inscripción abreviada «$x = \{u, w\}$», como se lo hacía antes, sino también los términos com-

puestos con ayuda del símbolo { }. En particular, (usando { } no de modo normalizado, sino de acuerdo con la tradición):

b) podemos introducir notaciones para los ordinales finitos

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots$$

ya como términos en nuestra extensión del lenguaje y luego «hundir» la aritmética formal en la teoría de conjuntos formal.

c) Deduciendo de los axiomas de Zermelo — Fraenkel la fórmula $\exists! \, x$ («x ordinal» $\wedge$ «x no es finito» $\wedge$ «$\forall$ ordinal $y < x$ es finito»), podremos introducir nueva constante ω_0 y continuar introduciendo nombres de nuevos ordinales que se caracterizan demostrable y unívocamente por las fórmulas del lenguaje L_1 Set (o de su extensión obtenida de forma idéntica).

En el cap. III haremos uso de esta nueva libertad de acciones.

9. Imposibilidad de expresar la veracidad: lenguaje SELF

9.1. Las sentencias del tipo «paradoja del mentiroso», siendo modelados en los lenguajes formales, conducen a teoremas importantes acerca de la pobreza de principio de los medios expresivos y demostrativos de tales lenguajes. Los más conocidos de ellos son el teorema de Tarski sobre la imposibilidad de expresar el conjunto de las fórmulas veraces de la aritmética y el teorema de Gödel sobre la imposibilidad de axiomatizar eficazmente la aritmética. Al teorema de Tarski se dedican los tres párrafos más próximos. Nuestra exposición se basa en el elegante trabajo de Šmullyan [31].

En este párrafo está descrito el lenguaje SELF extremadamente elemental (que no se encuentra en la clase $\mathscr{L}_1$) destinado a la autodescripción, en la cual se manifiesta expresamente la idea de la construcción. En el § 10 está introducido nuevo lenguaje de aritmética SAr, tan expresivo como L_1 Ar, que tampoco pertenece a la clase $\mathscr{L}_1$: su sintaxis está aproximada a la del SELF, lo que simplifica bruscamente la demostración. Por fin, en el § 11 el teorema de Tarski está demostrado para SAr con el método de Šmullyan.

9.2. Lenguaje SELF (Šmullyan's Easy Language For selfreference).

Alfabeto de SELF: E, $\ast$ (comillas simétricas); r (relación del rango 1); $\neg$ (negación).

Sintaxis de SELF. A las expresiones distinguidas pertenecen: rótulos, objetos expuestos, fórmulas y nombres.

El rótulo de cualquier expresión P es $\ast P \ast$ (P entre comillas).

El objeto expuesto de cualquier expresión P es $P \ast P \ast$ ("cosa con rótulo").

Las fórmulas son expresiones tipo $rE \ldots$ $\ldots E \ast P \ast$ o $\neg rE \ldots E \ast P \ast$. Aquí E está en los lugares de $k \geqslant 0$ después de r; la inscripción abreviada es $rE^k \ast P \ast$ o $\neg rE^k \ast P \ast$.

Por último, introduzcamos una relación binaria sobre el conjunto de todas las expresiones: «ser nombre». Ella se determina recursivamente:

a) el rótulo P es nombre de P;

b) si P es nombre de Q, entonces EP es nombre del objeto expuesto Q, o sea, nombre de la expresión $Q \ast Q \ast$.

9.3. Observaciones. a) Si P es nombre de Q, entonces el objeto expuesto Q tiene por lo menos dos nombres distintos: EP, $\ast Q \ast Q \ast \ast$. De este modo, la expresión puede tener varios nombres.

Al revés, por el nombre la expresión se restablece unívocamente: los nombres tienen forma de $E^k * P *$, $k \geqslant 0$.

Escribiremos $N(Q)$ en vez de «uno de los nombres de Q».

b) Cada fórmula tiene forma de $rN(Q)$ (o $\neg rN(Q)$). En el siguiente punto la interpretamos como enunciado «la expresión Q (no) posee la propiedad de R», y claro que, hablando de Q, la fórmula «denomina Q por el nombre».

c) La expresión $E*E*$ es uno de sus dos nombres. Exactamente así mismo la fórmula $rE*rE*$ «habla de sí misma» (p. 9.5). El lenguaje SELF ha sido construido de modo que estos efectos de autodescripción se revelasen con medios expresivos posiblemente más simples.

9.4. Interpretaciones estándares. Para definir una de las interpretaciones estándares del lenguaje SELF eligiremos cualquier conjunto (propiedad) R de expresiones del lenguaje e introduciremos la función de veracidad $|\ |_R$ sobre sus fórmulas por medio del acuerdo

$$1-|\neg rN(Q)|_R=|rN(Q)|_R=$$
$$=\begin{cases} 1, \text{ si } Q\in R, \\ 0 \text{ en los demás casos.}\end{cases}$$

Diremos que la fórmula es R-cierta (R-falsa), si el valor $||_R$ en ella es igual a 1 (0).

9.5. Teorema sobre la imposibilidad de expresar. *Para cualquier propiedad de R*

$$R\cap\{\text{fórmulas}\}\neq\begin{cases} \textit{fórmulas } R\textit{-ciertas}, \\ \textit{fórmulas } R\textit{-falsas}.\end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. a) la fórmula $Q=\neg rE* *\neg rE*$ R-cierta $\Leftrightarrow rE*\neg rE*$ R-falsa $\Leftrightarrow Q\notin R$, ya que $E*\neg rE*$ es nombre del objeto expuesto

$\neg rE$, o sea, de Q. De este modo, Q no puede estar simultáneamente en R y ser cierta lo que demuestra la primer parte del teorema.

El enlace con la paradoja del mentiroso se hace obvio, si se toma en consideración de que Q dice de sí: «Poseo la propiedad de R».

b) Análogamente la fórmula $rE \div rE_{\div}$ dice de sí: «Poseo la propiedad de R» y por eso no puede estar simultáneamente en R y ser R-falsa.

10. Lenguaje de la aritmética de Šmullyan

10.1. En este párrafo está descrito el lenguaje de la aritmética SAr y su interpretación estándar. La diferencia principal de SAr con respecto a L_1 Ar consiste en la posibilidad de formar «términos de clase», nombres de ciertos conjuntos de números naturales. Más exactamente, si $P(x)$ es una fórmula de SAr con una variable libre x, entonces la expresión $x(P(x))$ en SAr denomina el conjunto $\{x \in N \mid P(x) \text{ cierto}\}$, y la expresión $x(P(x))\,\overline{k}$, donde $\overline{k}$-término es nombre del número entero $k \geqslant 1$, denomina el enunciado «k satisface P». Esta extensión de los medios de expresión en SAr en comparación con L_1 Ar no aumenta la clase de subconjuntos en $\bigcup_{r \geqslant 1} N^r$ que pueden ser expresados por fórmulas, pero aproxima la sintaxis de SAr a la de SELF en tanto que permite imitar la demostración del teorema 9.5.

Además, en comparación con el alfabeto de L_1 Set, SAr está un poco modificado y reducido, pero esto ha sido hecho para simplificar las descripciones de la sintaxis y no empobrece la lógica de SAr.

10.2. Alfabeto de SAr: x (variable); $'$ (vigulilla para formar el conjunto numerable de las variables $x, x', x'', \ldots$); $\cdot$ (multiplicación, operación del rango 2); $\uparrow$ (elevación a la potencia, como

en el ALGOL, operación del rango 2); $=$ (igualdad); $\downarrow$ (conectiva, conjunción de negaciones); (,) paréntesis; $\bar{1}$ (constante unidad).

10.3. Sintaxis e interpretación de SAr. Debido al permiso de formar términos de clase $x\ (P\ (x))$ y fórmulas $x\ (P\ (x))\ \bar{k}$ la descripción de la sintaxis es más complicada que en los lenguajes de la clase $\mathcal{L}_1$.

Procediendo por recursión sobre el número entero $i \geqslant 0$, determinamos dos sucesiones de conjuntos de expresiones: Tm_{2i} (términos del rango $\leqslant 2i$) y Fl_{2i+1} (fórmulas del rango $\leqslant 2i+1$). (Al mismo tiempo, por recurrencia doble —sobre el rango del término o fórmula y dentro del conjunto Ti_{2i}, Fl_{2i+1} por la longitud— se establece el lema de la lectura unívoca, sobre el cual se basan las definiciones de las entradas libres (cerradas) y de las funciones de veracidad. Nada nuevo en comparación con el § 1 no hay aquí, y dejamos estos detalles al lector.)

Paralelamente con la sintaxis se describe la interpretación estándar de SAr en N. Para interpretar las expresiones con variables libres, es necesario fijar el punto $\xi \in N^N = N \times N \times \ldots$, el cual identificaremos con el vector infinito con coordenadas naturales: en el k-ésimo lugar se encuentra el valor de la k-ésima variable $(x'^{\cdots\prime})^{\xi}$ ($k-1$ virgulilla).

a$_0$) Tm_0 *son términos numéricos: el conjunto mínimo de expresiones que contiene las variables* x, x', x'', ..., *los nombres de números naturales* $\bar{1}$, $\overline{11}$, $\overline{111}$, ... *y es cerrado con respecto a la formación de las expresiones* $(t_1)\cdot(t_2)$, $(t_1) \uparrow (t_2)$, *donde* $t_i \in \mathrm{Tm}_0$.

En vez de $x'^{\cdots\prime}$ ($k-1$ virgulilla) escribiremos brevemente x_k; en lugar de $\bar{1} \ldots \bar{1}$ ($k \geqslant 1$ unidades) escribiremos $\bar{k}$.

El término $\bar{k}$ se interpreta como k (independientemente de ξ); x_k^{ξ} es la k-ésima coordenada de ξ si t_1^{ξ}, $t_2^{\xi} \in N$ ya están definidos, entonces $[(t_1)\cdot(t_2)]^{\xi} = t_1^{\xi} t_2^{\xi}$, $[(t_1) \uparrow (t_2)^{\xi}] = (t_1^{\xi})t_2^{\xi}$.

Las entradas de las expresiones $x_h = x' \cdot '$ en cualquier término de Tm_0, por lo visto, no se recubren. Todas ellas se consideran libres.

b$_0$) Fl_1 *es el conjunto de expresiones mínimo que contiene todas las expresiones del tipo* $t_1 = t_2$ *(donde* $t_i \in \mathrm{Tm}_0$*) y es cerrado con respecto a la formación de expresiones* $(P) \downarrow (P_2)$, *donde* $P_i \in \mathrm{Fl}_1$.

De otro modo dicho, Fl_1 es una clausura lógica de las fórmulas elementales $\{t_1 = t_2 \mid t_i \in \mathrm{Tm}_0\}$.

La elección del punto ξ define el valor de veracidad de cualquier fórmula $P \in \mathrm{Fl}_1$ por recursión sobre el número de entradas de la conectiva $\downarrow$.

$$|t_1 = t_2|\,(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_1^{\xi} = t_2^{\xi} \\ 0 & \text{en los demás casos;} \end{cases}$$

$$|(P_1) \downarrow (P_2)|\,(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |P_1|\,(\xi) = |P_2|(\xi) = 0, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Todas las entradas de variables en los elementos de Fl_1 no se recubren y se consideran libres.

Supongamos ahora que $i \geqslant 1$ y los conjuntos Tm_{2k-2}, Fl_{2k-1} están definidos para $k \leqslant i$ juntamente con las interpretaciones y la contraposición de las entradas libres (cerradas).

Definamos los conjuntos consecutivos por los acuerdos siguientes.

a$_i$) Tm_{2i} *son términos de clase del rango* $\leqslant 2i$:

$$\mathrm{Tm}_{2i-2} \cup \{x_k\,(P) \mid k \geqslant 1, \quad P \in \mathrm{Fl}_{2i-1}\}$$

(cuando $i = 1$ no es necesario incluir Tm_0).

Interpretación:

$(x_k (P))^{\xi} = \{x_k^{\xi'} \mid$ recorre las variaciones de ξ por x_k, para las cuales $\mid P \mid (\xi') = 1\}$.
Todas las entradas de la variable x_k en $x_k (P)$ se consideran conexas, las entradas de las demás variables son tales como en P.

b_i) Fl_{2i+1} *es una clausura lógica del conjunto de expresiones*

$\mathrm{Fl}_{2i-1} \cup \{x_k (P) = x_k (Q) \mid_{k \geqslant 1};$
$P,\ Q \in \mathrm{Fl}_{2i-1}\} \cup \{T\overline{k} \mid_{k \geqslant 1},\ \mathrm{T} \in \mathrm{Tm}_{2i}\}$.

Función de veracidad: pongamos $x_k (P) = T_1$, $x_k (Q) = T_2$; entonces

$$|x_k (P) = x_k (Q)| (\xi) =$$
$$= \begin{cases} 1, \text{ si } T_1^{\xi} = T_2^{\xi} \text{ como subconjuntos } N; \\ 0 \text{ en los demás casos;} \end{cases}$$

$$|T\overline{k}| (\xi) = \begin{cases} 1, \text{ si } k \in T^{\xi}, \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Sobre la clausura lógica la función $|\ \ |$ continúa del modo igual que en el p. 10.3 b_0).

Todas las entradas de las variables en $x_k (P) = x_k (Q)$ y $T\overline{k}$ son las mismas que en el término de clase respectivo. La composición con ayuda de la conectiva $\downarrow$ no cambia la calidad de entrada.

Al igual que en el p. 2.10, se demuestra que $\mid P \mid (\xi)$ depende sólo de ξ-valores de las variables que tienen entradas libres en la fórmula $P \in \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Fl}_{2i+1}$.

Con esto queda terminada la descripción de la sintaxis y semántica de SAr.

En conclusión mostremos que las clases de conjuntos en $\bigcup_{r \geqslant 1} N^r$ que pueden ser expresadas por las fórmulas de $\mathrm{L_1Ar}$ y SAr, coinciden. Este resultado no se aprovecha en la demostración del teorema de Tarski en el párrafo que

viene a continuación. Sin embargo, el mismo y el método de su demostración son aleccionadores.

Supongamos que L_1Ar tiene un conjunto numerable de variables. Al denotarlas por $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ y al identificar x_i con $x'\cdots'$ ($i - 1$ virgulilla), de modo evidente identificaremos también las clases de interpretación para L_1Ar y SAr. La afirmación acerca del poder equiexpresivo en seguida se obtiene entonces del hecho más fuerte siguiente:

10.4. Proposición. *Se puede definir efectivamente dos aplicaciones-traducciones*

$$\{\text{fórmulas } L_1Ar\} \rightleftarrows \{\text{fórmulas SAr}\}$$

con las siguientes propiedades:

a) *en cada punto* ξ *coinciden los valores de veracidad de cualquier fórmula y de su traducción;*

b) *los conjuntos de las variables libres de cualquier fórmula y de su traducción coinciden.*

¡Notemos que las aplicaciones que sean definidas por nosotros, no serán recíprocamente inversas!

DEMOSTRACIÓN.

a) *Traducción* L_1Ar—SAr. Denotaremos por «P» la traducción de la fórmula P. Primeramente traduciremos las fórmulas elementales, luego procedermos por recursión sobre la longitud. En el alfabeto de SAr no hay adición, pero hay multiplicación y elevación a potencia lo que permite en lugar de $z = x + y$ escribir $2^z = 2^x \cdot 2^y$.

a_1) *Fórmulas elementales.* Ellas tienen forma de $t_1 = t_2$. "Después de cumplir las acciones", sustituiremos cada término no nulo en L_1Ar por el "término normalizado", polinomio del tipo $\sum x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, donde los monomios están escritos en forma de $(\ldots((x_1 \cdot x_1) \cdot \ldots) \cdot x_2) \ldots)$, ubicados en orden léxico y separados con paréntesis $(\ldots((m_1 + m_2) + m_3) + \ldots)$. Claro está como se pone a tal término en correspondencia el término "$\bar{2} \uparrow t$" en SAr: digamos "$\bar{2} \uparrow ((x_1) \cdot (x_1) + x_2)$" es $(\bar{2} \uparrow (x_1) \cdot (x_1)) \cdot (\bar{2} \uparrow (x_2))$. La traducción de "$2 \uparrow \bar{0}$" según la definición es $\bar{1}$. Después de esto la traducción de l fórmula $t_1 = t_2$ según la definición será "$2 \uparrow t_1$" $=$ "$2 \uparrow t_2$". Claro está que ellas tienen las mismas variables y son ciertas en los mismos puntos ξ.

a_2) Si "Q", "Q_1", "Q_2" ya están definidas, entonces "$\neg Q$" se define como "Q" $\downarrow$ "Q". De forma análoga se construye "$Q_1 \veebar Q_2$" para las demás conectivas (compárese la digresión sobre la sintaxis en el cap. 1).

a_3) Si "Q" está definida, entonces "$\forall x_k Q$" se define como

$$x_k\ («Q») = x_k\ (x_k = x_k).$$

Ambas fórmulas son ciertas en el punto ξ, si y sólo si Q (y «Q») son ciertas en todas las variaciones ξ' del punto ξ por x_k.

Sus variables libres son comunes, ya que según la inducción se puede suponer que esto es así para Q y "Q".

a_4) "$\exists x_k Q$" según la definición coincide con "$\neg \forall x_k \neg Q$".

b) *Traducción* de SAr—L_1Ar.

La traducción de P, como antes, la denotaremos por «P», aunque esta vez P será la fórmula de SAr y «P» la fórmula de L_1Ar.

El lugar delicado es la traducción de la fórmula $x_1 = x_2 \uparrow x_3$. Se sabe, aunque no es muy fácil demostrar [12] que ella existe e incluso puede ser tomada en forma de $\exists x_4 \ldots \exists x_n p\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde p es una fórmula elemental de L_1Ar. Aquí le demos crédito a este hecho y elijamos cierta traducción «$x_1 = x_2 \uparrow x_3$ una vez para siempre.

b_1) *Traducción de las fórmulas* de Fl_0. Las siguientes reglas brindan una definición recursiva:

"$t_1 = t_2$" tiene la misma forma, si $t_1 t_2 \in$ {variables} $\cup$ {$\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{1}$, ...} (en el sentido, naturalmente, que $x'^{\cdots\prime}$ se sustituye por x_k y $\bar{1} \ldots \bar{1}$, por $(\ldots(\bar{1} + \bar{1}) + + \bar{1}) + \ldots)$.

"$x_k = t_1 \cdot t_2$" tiene forma de $\exists x_i \exists x_j$ ("$x_i = t_1$" $\wedge$ "$x_j = = t_2$" $\wedge$ $x_k = x_i \cdot x_j$).

"$x_k = t_1 \uparrow t_2$ tiene forma de $\exists x_i \exists x_j$ ("$x_i = t_1$" $\wedge$ $\wedge$ "$x_j = t_2$" $\wedge$ "$x_k = x_i \uparrow x_j$"),

donde x_i, x_j son las primeras dos variables que no entran en t_1, t_2.

De forma análoga se traducen las fórmulas con los segundos y primeros miembros permutados, así como con $\bar{1} \ldots \bar{1}$ en vez de x_k. Luego, pongamos

"$t_1 = t_2$" tiene forma de $\exists x_i$ ("$x_i = t_1$" $\wedge$ "$x_i = t_2$"), donde x_i es la primera variable que no entra en t_1, t_2, sólo si ninguno de los términos t_1, t_2 sea variable o $\bar{1} \ldots \bar{1}$.

Claro está que la función de veracidad y el conjunto de variables libres se conservan con tal traducción.

b_2) Supongamos que las fórmulas de Fl_{2i-1} ya están traducidas. Pongamos

$$\text{“}x_k (P_1) = x_k (P_2)\text{”} \quad \text{es} \quad \forall x_k (\text{“}P_1\text{”} \leftrightarrow \text{“}P_2\text{”});$$

$$\text{“}x_k (P)\ \bar{n}\text{”} \quad \text{es} \quad \text{“}P\text{”}\ (\bar{n}),$$

donde a la derecha $\bar{n} = (\ldots(\bar{1} + \bar{1}) + \ldots)$ está sustituido en vez de todas las entradas libres de x_k en «P». Esto concluye la demostración.

11. Imposibilidad de expresar la veracidad: teorema de Tarski

11.1. El lenguaje SAr se interpreta en N y no en el conjunto de sus fórmulas como SELF. Para poder determinar el conjunto de fórmulas que puede ser expresado, las numeraremos con (ciertos) números enteros de modo siguiente.

Los símbolos del alfabeto (son nueve) los numeraremos mediante los números enteros de 1 a 9 en cualquier orden, *pero de modo tal que* $\bar{1}$ *tenga el número* 9. Después de eso pongamos ($a_i \in$ (alfabeto SAr), $\nu (a_i)$ son números de a_i):

$$\text{número } (a_1, \ldots, a_k) = n (a_1, \ldots, a_k) = \\ = \sum_{i=1}^{k} \nu (a_i) \cdot 10^{k-i} + 1.$$

Con otras palabras, el número de expresión se obtendrá, si se reemplazan todos los símbolos que lo integran por cifras árabes respectivas (¡y cambiando $\bar{1}$ por 9!), luego se leerá la inscripción decimal obtenida y este número se aumentará en uno. Es obvio que por el número la expresión se restablece unívocamente.

Denominaremos *rótulo* de la expresión P el *nombre del número* P en SAr, o sea, $\bar{1} \ldots \bar{1}$ ($n (P)$ veces). Denotaremos el rótulo P por ⋊ P ⋉, al igual que en SELF (pero esta vez eso es una abreviatura).

Denominaremos *objeto expuesto* P la expresión $P \ast P \ast$.

11.2. Definición. *Sea $P(x)$ una fórmula de SAr con una sola variable x libre.*

a) *La expresión Q satisface P, si el número de Q se encuentra en el conjunto $\{k \mid P(\bar{k})\}$ es cierta$\}$;*

b) *la expresión Q está expuesta en P, si el objeto expuesto Q satisface P.*

11.3. Lema. *Sea $P(x)$ tal como en el p. 11.2. Denotemos por $P_E(x)$ la fórmula $P((x)\cdot((\bar{10}) \uparrow (x)))$ (el término "$x10^x$" ha sido puesto en lugar de todas las entradas libres de x). Entonces el conjunto de expresiones que satisfacen P_E coincide con el conjunto de expresiones expuestas en P.*

DEMOSTRACIÓN. Si Q lleva el número k, entonces el objeto expuesto Q lleva el número $k\cdot 10^k$ (he aquí para que $\bar{1}$ lleva el número nueve):

$$n(Q \ast Q \ast) = n(Q\underbrace{\bar{1}\ \ldots\ \bar{1}}_{n(Q)\ \text{veces}}) = (n(Q)-1)\cdot 10^{n(Q)} +$$

$$+\underbrace{9\ \ldots\ 9}_{n(Q)\ \text{veces}}+1 = n(Q)\cdot 10^{n(Q)}.$$

Por consiguiente, el número Q satisface P_E cuando y sólo cuando el número del objeto expuesto Q satisfaga P.

11.4. Teorema. *Para toda fórmula $P(x)$, como en el p. 11.2, tenemos*

{Conjunto de fórmulas que satisfacen P} $\neq$

$$\neq \begin{cases} \text{conjunto de fórmulas ciertas,} \\ \text{conjunto de fórmulas falsas.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Examinemos la fórmula de Tarski — Šmullyan $S : xP_E \ast xP_E \ast$. Según las definiciones tenemos (téngase en cuenta que xP_E es un término de clase y $\ast\, xP_E \ast$ es nombre del número):

S es cierta $\Leftrightarrow$ *xP_E satisface P_E* $\Leftrightarrow$ *xP_E está expuesta en P* (*lema* 10.3) $\Leftrightarrow$ *el objeto expuesto xP_E satisface P* $\Leftrightarrow$ *S satisface P.*

Entonces, ora S no es falsa y satisface P, ora es falsa y no satisface P; por eso el conjunto de fórmulas que satisfacen P no puede coincidir con el conjunto de fórmulas falsas.

Como en el § 9, la fórmula S dice: «Yo satisfago P». De forma análoga, la fórmula

$$x\,((P) \downarrow (P))_E \ast x\,((P) \downarrow (P))_E$$

dice: «Yo no satisfago P» y por eso ora satisface P, ora no es cierta. El teorema queda demostrado.

11.5. El lema 11.3 es, desde luego, pura hechicería. El sistema decimal aquí no tiene nada que ver, y no era obligatorio numerar $\neg$ por la nueve, pero así todo resulta más hermoso.

Más general, sea ?Ar cualquier lenguaje de aritmética con alfabeto finito conteniente el alfabeto de SAr. Sean extendidas las reglas de formación y de interpretación estándar de las fórmulas en ?Ar como se quiera en comparación con SAr. Se requiere solamente que los términos y fórmulas de SAr conserven su sentido anterior y que para cualquier fórmula $P(x)$ en ?Ar con la variable x libre la expresión $x\,(P\,(x))\,\bar{k}$ sea fórmula en ?Ar y se interpreta según la misma receta que en SAr. (Por ejemplo, se puede agregar a SAr el signo «+», conectivas y cuantificadores y dar el permiso de construir también las fórmulas según las reglas de $\mathscr{L}_1$: de este modo encajaremos L_1 Ar en ?Ar).

Entonces para ?Ar es justo el teorema sobre la imposibilidad de expresar la veracidad del p. 11.4.

La numeración ha de ser elegida así: si m es el número de elementos del alfabeto ?Ar, ν es la numeración de los símbolos con la cual $\nu\,(1) =$

$= m$, entonces

$$n(a_1 \ldots a_k) = \sum_{i=1}^{k} \nu(a_i)(m+1)^{k-1} + 1$$

Entonces en los convenios anteriores

$$n(Q \times Q \times) = n(Q\underbrace{\bar{1} \ldots \bar{1}}_{n(Q) \text{ vez}}) =$$

$$= (n(Q) - 1)(m+1)^{n(Q)} + m \sum_{j=0}^{n(Q)-1} (m+1)^j + 1 =$$

$$= n(Q)(m+1)^{n(Q)}$$

y, después de definir $P_E(x)$ como $P((x) \times \times \overline{((m+1)} \uparrow (x)))$, sin variaciones ulteriores, obtendremos el lema 11.3 y el teorema de Tarski para ?Ar.

11.6. Comentarios. a) Si el teorema de Tarski no fuese justo y para una fórmula $P(x)$ cualquiera resultase que

$$\{Q \mid Q \text{ es fórmula y } \overline{P(n(Q))} \text{ es cierta}\}$$

coincide con el conjunto de todas las fórmulas ciertas de la aritmética, esto significaría que todas las cuestiones de la teoría de los números se reducen a una serie de problemas del mismo tipo. En vez de preguntar si es justo el problema número n, se podría preguntar, si es cierta la afirmación $P(\bar{n})$.

Aunque tal problema de colas pueda tener una complicación considerable (y en sentido determinado ser «infinitamente complicado»), el teorema de Tarski afirma que toda la aritmética es mucho más diversa.

b) Mientras tanto se nos queda el motivo de sospechar que el asunto consiste en la numeración «demasiado acertada» de las fórmulas. Eso no es

así. Se puede mostrar que el teorema de Tarski queda justo para cualquier numeración, con la cual la fórmula y su número se restablecen efectivamente uno por el otro.

c) Es cosa natural plantear la pregunta, si puede ser expresado el conjunto de números de las fórmulas *demostrables* o que pueden ser *deducidas* (al definir en cierta ocasión axiomas o reglas de inferencia, digamos, en SAr). La respuesta es: sí, puede ser *expresado.*

Aduciremos consideraciones intuitivas a favor de ello.

Independientemente de cómo definamos el concepto de la demostrabilidad, se puede considerar naturalmente que éste posee las propiedades siguientes: *existe un algoritmo* (digamos, un programa en el ordenador) *el cual por cualquier texto del lenguaje dado discierne, si este texto es una demostración y precisamente de qué fórmula.*

Escribamos ahora un programa, el cual construirá seguidamente, en orden léxico, textos en el lenguaje, verificará si éstos son demostraciones y calculará el número de la fórmula demostrada en caso de ser positiva la respuesta. El gráfico de la función (número de la demostración) → (número de la fórmula demostrada) puede ser expresado en L_1 Ar, hablando en términos generales, porque la lógica de máquina y aritmética están engendradas en L_1 Ar. Por eso el conjunto de números de las fórmulas demostrables puede ser expresado en L_1 Ar, en SAr o en cualquier lenguaje de ?Ar como en 11.5.

Reuniendo esta deliberación con el teorema de Tarski, obtenemos la forma siguiente del teorema de Gödel:

11.7. Teorema de Gödel acerca de la incompletitud de la aritmética. *En cualquier lenguaje de la aritmética de tipo ?Ar y con cualquier defini*

ción de la deductividad, para la cual el conjunto (de números) de las fórmulas deductivas puede ser expresado

{fórmulas verdaderas} $\neq$ *{fórmulas a deducir}.*

Digresión acerca de la autorreferencia

Hace poco en las lenguas naturales fue distinguida por los lingüistas una clase de tal llamados enunciados performativos. Su rasgo característico es la autorreferencia, o sea, «capacidad de correlacionarse, como con su ponente, con la realidad creada por el mismo enunciado debido a lo que ésta se realiza en las condiciones que lo convierten en una operación» (*E. Benveniste*). A ellos conciernen: «juro», cuando el mismo enunciado constituye un acto de juramento; «declaro la movilización total», «le nombro a Vd. director», cuando estos enunciados constituyen un acto del poder autorizado a realizar dichas acciones.

El análisis detallado de la semántica de los enunciados performativos revela en ellos una matiz imperativa aunque expresada por el modo indicativo de los verbos.

En relación con eso es interesante comparar el papel de la autorreferencia en los lenguajes formales y algorítmicos (compárase el p. 1.2 del cap. 1). En los lenguajes formales (y en general en los lenguajes de descripción) ella conduce a círculos lógicos, paradojas o, tratando de evitar el círculo, a la manifestación de la inferioridad. Al revés, en los lenguajes algorítmicos (y en general en los lenguajes y sistemas de mando) la autorreferencia es el procedimiento más importante de desarrollo del programa finito en un proceso (ciclos) potencialmente tan largo como se quiera; ella participa en los actos de mando

(reacción) y pertenece al número de posibilidades fundamentales del sistema.

Tal polisemia se observa también en la sicología: compárase la confrontación *autoanálisis — autoeducación*.

Por fin, la autorreferencia puede desempeñar un papel en la condicionalidad genética de los procesos de envejecimiento (sistemas biológicos y sociales). El ciclo con autocirculación realizado muchas veces lleva a la erosión del lugar de circulación.

12. Lógica cuántica

12.1. El último párrafo del capítulo está dedicado a algunos hechos físicos y construcciones matemáticas adoptados para su descripción. En particular, se examina el teorema de von Neumann sobre la imposibilidad de introducir parámetros latentes en el cuadro cuántico-mecánico del universo. Este material no es completamente tradicional para el curso de la lógica con el cual tiene relación equívoca.

Primero, el teorema de von Neumann es un ejemplo raro de afirmación metafísica. Este teorema concierne a las propiedades del lenguaje y no del microuniverso, como, digamos, el teorema de Tarski en las matemáticas lo que explica su posición aislada en la física y nuestro interés hacia éste.

Segundo, el análisis de los efectos cuántico-mecánicos reveló una divergencia real profunda de las lógicas internas del macro y microuniverso. Aunque la transmisión de estas diferencias con los medios del lenguaje natural y la lógica natural es horriblemente difícil y al fin de cuentas siempre deja una insatisfacción, estas tentativas continúan constantemente. Los fundamentos de la

física del siglo XX nos dieron una severa lección. Para su creación y comprensión resultaron totalmente sin importancia precisamente aquellas abstracciones gnoseológicas, las cuales fueron tan apreciadas por los críticos de los fundamentos de las matemáticas del siglo XX: la finitud, no contradicción, carácter constructivo y en general la claridad intuitiva cartesiana. En vez de esto en el primer plano se destacaron los principios por nadie predichos: propiedad de complementar, función de veracidad no clásicamente probabilística.

La exposición que viene a continuación se basa en el artículo [36]. En los pp. 12.9—12.16 está contenida pura álgebra que formalmente no se basa en el texto semifísico restante.

12.2. Atomo de ortohelio. Ahora describiremos algunas características de comportamiento del sistema físico «átomo de ortohelio en el estado $n = 2$, $l = 0$, $s = 1$». En este estado el átomo de helio está excitado: sus dos electrones se encuentran en el segundo nivel energético, sus spines están dirigidos hacia el mismo lado. No obstante, el estado es metaestable: para caer al primer nivel los electrones deben virar con sus spines hacia los lados opuestos (parahelio) lo que es que crea una cierta estabilidad.

El spin es una magnitud física de la misma dimensión que el «momento angular de la cantidad de movimiento». El spin total de nuestro sistema (en unidades atómicas: la unidad de acción es igual a la constante de Planck $h/2\pi$) se representa como vector unitario en el espacio físico tridimensional. Como primera aproximación se puede imaginar que éste se cambia con el tiempo, pero sus valores instantáneos se dejan medir. (El carácter inadecuado de estas presentaciones pronto será demostrada.)

El experimento para medir el valor instantáneo del spin de nuestro sistema puede consistir en conectar un campo magnético de determinada forma geométrica y en registrar el desplazamiento de los niveles energéticos (rayas espectrales) del átomo. Cada resultado de tal experimento se interpretan determinadamente como medición de la proyección del spin sobre una u otra dirección destacada unívocamente por la geometría del campo. Identificaremos las direcciones con los puntos de la esfera unitaria. S^2. La mecánica cuántica hace las siguientes afirmaciones positivas sobre las medidas del spin de ortohelio.

Las magnitudes siguientes son mensurables:

a) proyección del spin $s(\alpha, t)$ sobre la dirección $\alpha \in S^2$ en el instante del tiempo t;

b) longitudes de tres proyecciones del spin $\{|s|(\alpha_i, t)\}$, $i = 1, 2, 3$ sobre tres direcciones ortogonales de dos en dos (punto de referencia) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subset S^2$ en el instante de tiempo t.

Las predicciones sobre los resultados de la medida son tales como viene a continuación:

c) $s(\alpha, t)$ es una magnitud aleatoria que adquiere solamente los valores -1, 0, 1. (Las probabilidades de estos valores pueden ser predichas por los resultados de las medidas anteriores, pero aquí no son esenciales para nosotros.)

d) $\sum_{i=1}^{3} |s|(\vec{\alpha}_i, t) = 2$ para cualquier versor

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y cualquier t.

12.3. Tentativa de interpretación clásica. Podría consistir en la aceptación de las hipótesis siguientes:

A. Hay cierto espacio Ω de «parámetros latentes» o de «estados interiores» del sistema y una función $s(\alpha, t; \omega)$, $\omega \in \Omega$, tal que si en el instante

del tiempo t el sistema se halla en el estado ω, entonces $s(\alpha, t; \omega)$ es el «valor verdadero de la proyección del spin sobre el eje α» en este momento.

B. El aspecto probabilístico predicho en el p. 12.2c es consecuencia de nuestra ignorancia de los valores exactos de $\omega = \omega(t)$, así que para una cierta medida $d\mu(\omega)$ tenemos una *esperanza matemática* $s(\alpha, t) = \int\limits_{\Omega} s(\alpha, t; \omega)\, d\mu(\omega)$; de forma análoga para $|s|$.

Generalizando, se podría considerar que Ω depende no sólo del propio sistema, sino también de la instalación para medir el spin; μ puede depender del tiempo, etc. No obstante, todas estas posibilidades se hallan en contradicción con las predicciones del p. 12.2c, d) debido a la siguiente causa sorprendente.

12.4. Proposición (Kochen, Specker). *No existe aplicación $S^2 \to \{0, 1\}$, tal que para cualquier punto de referencia $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ el valor de esta aplicación sea igual a 0 exactamente en una dirección α_i.*

Además, se puede construir un sistema finito de 117 *puntos $\Gamma \subset S^2$ con la propiedad siguiente. Para cualquier aplicación k: $\Gamma \to \{0, 1\}$ se encontrará un punto de referencia $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \Gamma$, en el cual k adquiera el valor 0 no precisamente una sola vez, o se encontrará un par de direcciones perpendiculares $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \Gamma$ en las cuales k sea igual a* 0.

Entre tanto, la aceptación simultánea de las afirmaciones del p. 12.2 y de las hipótesis del p. 12.3 permitiría construir tal aplicación de la esfera. En efecto, sería suficiente examinar

$$S^2 \to \{0, 1\}: \alpha \mapsto |s|(\alpha, t; \omega)$$

siendo fijas t, ω. Según el p. 12.2c $|s|$ adquiere solamente los valores 0,1, y según 12.2d en cual-

quier versor $|s|$ adquiere dos veces el valor 1 y una vez 0.

Demostraremos la proposición 12.4 en el p. 12.12—12.15, y ahora nos pondremos a exponer más sistemáticamente la «lógica cuántica». Nos atendremos al dualismo cómodo y acostumbrado «lenguaje — interpretación», aunque en la física el uno y la otra estén menos formalizados y se separen con mayor dificultad.

12.5. Lenguaje de la mecánica cuántica no relativista. Para describir el sistema físico S del tipo «electrón libre», «átomo de helio en el campo magnético», etc., la mecánica cuántica aprovecha cierto fragmento del lenguaje del análisis funcional «orientado hacia la descripción de S» (véase [28, 29]). Suponiendo que el lector conoce el análisis funcional, nos limitaremos a la lista de términos más importantes que se utilizan. Aquí mismo vienen sus sinónimos utilizados por los físicos: señalan el «sentido físico», o sea, la interpretación que en nuestro texto se examinará aparte.

a) *Espacio hilbertiano separable complejo* $\mathcal{H}_S$. Son importantes también sus subespacios unidimensionales y vectores de longitud de la unidad. El sinónimo para los primeros es estados (puros); para los segundos, ψ-funciones (normadas), más exactamente, valores instantáneos de las ψ-funciones.

b) *La representación unitaria* R *en* $\mathcal{H}_S$: $t \mapsto u_t = e^{-iH_S t}$. Sinónimos: $t \mapsto u_t$ es grupo dinámico; t es tiempo; la generatriz infinitesimal H_S (operador autoconjugado) es operador dinámico, o hamiltoniano S.

c) *Ecuación de Schrödinger*: $\partial\psi_t/\partial t = -iH_S\psi_t$. La satisfacen las ψ-funciones que evolucionan con el tiempo: $\psi_t = e^{-iH_S t}$.

d) *Operadores autoconjugados* en $\mathcal{H}_S$. Sinó-

nimo: observables. El operador H_S es un observable de energía. El espectro discreto de H_S son niveles energéticos de S.

Para nosotros especial importancia tendrán los observables, a saber, proyectores ortogonales. De este modo, los estados puros de $C\psi \subset \mathcal{H}_S$ se hallan en correspondencia biunívoca con los proyectores P_ψ sobre el subespacio respectivo.

Otra clase importante de proyectores se construye a base del teorema de la descomposición espectral. Supongamos que $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP_A(\lambda)$. Entonces para cualquier subconjunto boreliano $u \subseteq R$ está definido el proyector $P_A(u)$. Su imagen en los casos elementales está puesto sobre aquellos vectores en $\mathcal{H}_S$ que son propios para A con valores propios de u.

Los observables-proyectores se llaman también «cuestiones» (Macky) o «propiedades alternativas» (traducción del término de von Neumann).

e) *Operadores conmutadores.* Sinónimo: observables medibles conjuntamente (simultáneamente).

Para los operadores no acotados A, B, cuyo conmutador formal en general puede tener un campo vacío de definición, la conmutatividad se determina como permutabilidad de $P_A(U_1)$, $P_A(U_2)$ para cualesquiera borelianos $U_1, U_2 \subseteq R$.

f) *Representaciones unitarias en* $\mathcal{H}_S$ *de distintos grupos, a saber*: SO(3), Su(2), Sn, etc. Sinónimo: simetrías del sistema S (si las representaciones conmutan con el hamiltoniano H_S); simetrías aproximadas (si $H_S = H_0 + H_1$, donde las representaciones conmutan con H_0, siendo H_1 una «pequeña perturbación»).

12.7. Ejemplo. S es un «electrón en el campo eléctrico del protón» (sin tomar en consideración el movimiento del protón, los efectos relativistas y el spin). Aquí $\mathcal{H}_S = L^2(E^3)$ son funciones complejas de cuadrado integrables en el «espacio físico de coordenadas del electrón» euclidiano. H_S es una extensión autoconjugada del operador

$$-\frac{h}{4\pi m}\Delta - \frac{1}{h}\frac{e^2}{r},$$

donde h es la constante de Planck; m, la masa del electrón; e, su carga; r, la distancia hasta el origen de coordenadas (donde descansa el protón).

Niveles de energía (espectro discreto de H_S):

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Las ψ-funciones propias que corresponden a los puntos de este espectro son estados del electrón enlazado con el protón en un átomo de hidrógeno. El nivel de energía $n = 1$ corresponde al átomo no excitado, los demás, al estado de excitación. El semieje positivo es el espectro continuo de H_S; en los estados con energía positiva del electrón el «átomo de hidrógeno está ionizado».

Observables más importantes del electrón: operadores de multiplicación por tres funciones x_j de coordenadas (observables de las coordenadas); extensiones autoconjugadas de los operadores $p_j = \left(\frac{h}{2\pi i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ (observables de la proyección de los impulsos). Los operadores x_j y p_j no conmutan, así que la coordenada x_j y la proyección del impulso en el eje x_j no son medibles simultáneamente.

El sistema S esféricamente es simétrico. La representación natural SO(3) en $L^2(E^3)$ con-

muta con H_S. La acotación de esta representación en el subespacio de $\mathscr{H}_S$ que responde al espectro discreto de H_S se descompone naturalmente en una suma directa de representaciones que responden a los niveles de la energía E_n. Por su parte, el E_n-subespacio se descompone en una suma directa de representaciones SO(3) sobre los polinomios esféricos de grados $j = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$ con multiplicidad de 1. Si la ψ-función del electrón pertenece al nivel E_n y al subespacio que responde a la representación SO(3) sobre los polinomios esféricos de grado j, se dice que (n, j) es el número cuántico principal y orbital del correspondiente estado del electrón en el átomo de hidrógeno.

Hemos brindado el modelo de un texto físico de estudio. El «lenguaje» en éste está mezclado con el «metalenguaje» el cual señala la interpretación estándar de aquél. Describámosla ahora aparte y más sistemáticamente.

12.8. Interpretación. Un aspecto muy importante de la interpretación, el cual no podemos tocar aquí, es la lista de recetas no formales para elegir $\mathscr{H}_S$, H_S y los observables que responden al sistema dado de S. Esta elección de las «unidades de expresión» se realiza a menudo en dos etapas: elección de la descripción clásica y aplicación de las «reglas de cuantificación» a la misma. Esta elección puede ser «aproximada» en el sentido de que no se toman en consideración unas u otras circunstancias (como el spin en el p. 12.7).

Supongamos que $\mathscr{H}_S$ y H_S ya están elegidos. La peculiaridad más característica de la interpretación del lenguaje cuántico es su carácter de «doble capa». Una parte de los enunciados matemáticos se interpreta como afirmaciones sobre el «sistema que evoluciona libremente» y la otra,

como afirmaciones sobre los resultados de observación del mismo.

a) *Evolución libre.* Se considera que (entre límites de la aproximación elegida) una información máximamente completa sobre el estado del sistema en el instante t se prefija por su ψ-función $\psi_t \in \mathcal{H}_S$. Mientras nadie acecha el sistema, ψ_0 evoluciona como $e^{-iH_S t}\psi_0$, a partir del estado inicial de ψ_0. ¿Cómo se puede hallar ψ_0? Véase el punto 12.8c).

b) *Observación.* Supongamos que queremos medir el valor instantáneo de cierta magnitud física para nuestro sistema S en el instante t. A esta magnitud le responde el observable A. (¿Cómo se puede identificar el aspecto de A? Véase el comienzo del p. 12.8). Supondremos para simplificar que A tiene un espectro puntual único.

Las predicciones respecto a las observaciones son las siguientes.

Si $A\psi_t = a\psi_t$, entonces a será el valor de la observable A en el instante t para el sistema S en el estado con la ψ-función ψ_t.

Supongamos que en el caso general $\psi_A^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, es una base ortonormal $\mathcal{H}_S$ de vectores propios para A. Descompongamos ψ_t por esa base

$$\psi_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i(t)\,\psi_A^i.$$

Sea $A\psi_A^{(i)} = a_i\psi_A^{(i)}$.

En este caso el resultado de la medida de A será una magnitud aleatoria que adquiere los valores de a_i con las probabilidades $|a^{(i)}(t)|^2$ respectivamente. (Su esperanza matemática, como se ve fácilmente, es igual al producto escalar $(A\psi_t, \psi_t)$). Esa fórmula es apta para todas las A.

Más general, la probabilidad de que los valores de A caigan en el subconjunto boreliano $U \subset R$ es igual a $(P_A(U)\psi_t, \psi_t)$, donde $P_A(U)$ está definido en el p. 12.5 d).

c) *Evolución después de la observación.* En las suposiciones del punto anterior la ψ-función del sistema después de la observación se define por el resultado de ésta: si en el instante t_0 para A se ha registrado el valor a_i, entonces S evoluciona a partir de $\psi_A^{(i)}$ en el instante t_0 hasta la observación siguiente, efectuándose la evolución en forma totalmente independiente de la anterior.

De este modo, el resultado de observación puede permitirnos reconocer la forma de la ψ-función *después de* la observación, pero no proporciona información acerca de cuál era *antes* de la misma.

Por eso los físicos a menudo dicen que el registro del valor a_i *prepara* el sistema en el estado $\psi_A^{(i)}$ en el instante de tiempo t_0. Otro sinónimo: en el instante de observación la ψ-función *se concentra* en $\psi_A^{(i)}$.

Si logramos registrar valores simultáneos de dos observables, quiere decir que hemos preparado el sistema con la ψ-función propia para ambas. Por cuanto para los observables no conmutadores siempre existen vectores propios no comunes, sus valores, hablando en general, no son medibles simultáneamente.

12.9. Lógica cuántica. Formemos ahora el esqueleto algebraico de la lógica cuántica. Partiremos de las analogías siguientes.

Supongamos que se da un lenguaje formal de la clase $\mathcal{L}_1$ con la única variable y su interpretación en el conjunto M, donde esta variable puede adquirir valores. En este caso en M se destaca el álgebra booleana B de conjuntos que

pueden ser expresados (compárese el § 3). A la conjunción de las fórmulas le responde la intersección booleana de los conjuntos expresados por ellas, etc. Según la definición $N \in B$ si los medios del lenguaje permiten hacer la pregunta: «¿Pertenece o no el valor de N a la variable?». El álgebra B es el invariante más importante del par {lenguaje, interpretación}.

Analicemos ahora el lenguaje de la mecánica cuántica orientado hacia la descripción del sistema S. Tendremos que excluir el aspecto temporal *fijando* el instante de tiempo al cual conciernen los enunciados acerca del estado del sistema. Entonces el «estado del sistema» será la única variable del lenguaje. La misma adquiere valores en el conjunto de rectas del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_S$. Las únicas preguntas, a las cuales es posible contestar de modo bivalente, son las siguientes: «¿pertenece o no el estado del sistema al subespacio cerrado dado $\mathcal{H}_S$?». Los subespacios cerrados $\mathcal{H}_S$ forman el análogo del álgebra B. La conjunción de preguntas responde a la formación de la intersección de subespacios, la disyunción, a su suma, pero ambas operaciones pueden ser realizadas solamente en el caso, cuando las correspondientes observables-proyectores conmuten, y sólo en este caso están cumplidas las identidades booleanas.

Axiomaticemos la situación:

12.10. Definición. *Se llama álgebra booleana parcial B el conjunto dotado de las estructuras siguientes:*

a) *relación binaria reflexiva y simétrica $\divideontimes$ de la «mensurabilidad compatible». En vez de $\langle a, b\rangle \in \divideontimes$ escribimos $a \divideontimes b$;*

b) *operaciones binarias parciales $\bigvee$, $\bigwedge$ y operación unaria $'$;*

c) *elementos* 0, $1 \in B$.

Estas estructuras deben satisfacer los siguientes axiomas:

d) *la razón* $\divideontimes$ *es cerrada con respecto a las operaciones* $\wedge$, $\vee$, $'$: *si* a_1, a_2, a_3 *son conjuntamente medibles dos a dos, entonces* $(a_1 \wedge a_2) \divideontimes a_3$, $(a_1 \vee a_2) \divideontimes a_3$, $a'_1 \divideontimes a_3$; *además,* $a \divideontimes 0$, $a \divideontimes 1$ *para todos los* $a \in B$.

e) *Si* a_1, a_2 *y* a_3 *son conjuntamente medibles dos a dos, entonces engendran, juntamente con* 0 *y* 1, *el álgebra booleana con respecto a las operaciones* $\wedge$, $\vee$ y $'$.

12.11. Ejemplo. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert (posiblemente real y de dimensión finita). El álgebra booleana parcial $B(\mathscr{H})$ se define como un conjunto de subespacios cerrados $\mathscr{H}$ con estructuras siguientes:

a) $a \divideontimes b$ si y sólo si existen tres subespacios dos a dos ortogonales cerrados c, d, $e \subseteq \mathscr{H}$, tales que $a = c \oplus d$, $b = e \oplus d$.

Motivación: dicha condición equivale a la conmutatividad de los proyectores en a, b;

b) $a \wedge b$ = intersección de a, b;

c) $a \vee b$ = suma de a, b;

d) a' es un complemento ortogonal de a;

e) $0 = \{0\}$, $1 = \mathscr{H}$.

Una de las formas del teorema de la no existencia de parámetros latentes es la siguiente:

12.12. Teorema. *Si* dim $\mathscr{H} \geqslant 3$, *entonces no se puede encajar* $B(\mathscr{H})$ *en el álgebra booleana conservando las operaciones.*

El resultado se somete a distintos reforzamientos formales (véase [36, § 5]). No nos detendremos en ellos.

DEMOSTRACIÓN. Elijamos en $\mathscr{H}$ el subespacio euclídeo real $E^3 \subseteq \mathscr{H}$ y mostremos que ya $B(E^3)$ no se encaja en el álgebra booleana. Si no, existiría un homomorfismo del álgebra parcial $B(E^3)$ sobre el álgebra booleana binaria $\{0, 1\}$,

puesto que para cualquier par de elementos de cualquier álgebra booleana existe su homomorfismo que los separa en $\{0, 1\}$.

Sea h tal homomorfismo. Si $a_1, a_2, a_3 \subset E$ son rectas ortogonales dos a dos, entonces

$$h(a_i \wedge a_j) = h(a_i) \wedge h(a_j) = 0 \text{ para } i \neq j.$$

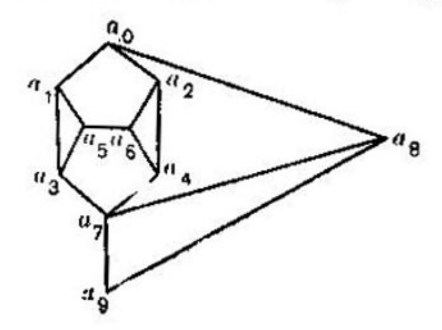
Por eso de cualquier par de rectas ortogonales una de las mismas por lo menos ha de pasar a 0. Luego, $h(a_1 \vee a_2 \vee a_3) = h(a_1) \vee h(a_2) \vee \vee h(a_3) = h(E^3) = 1$. Por eso de cualquier punto de referencia exactamente una recta debe pasar a 1.

Aplicando los puntos de la esfera unitaria S^2 sobre las rectas que los unen con el origen, obtendríamos con ayuda de h la aplicación S^2 con la propiedad ya descrita en la proposición 12.4 (sólo es necesario cambiar de lugar 0 y 1). Demostremos que tal conjunto con dicha propiedad no existe siquiera en el subconjunto conveniente de 117 puntos en S^2. Este resultado reforzado es combinatoriamente hermoso y físicamente importante: la tentativa de medir simultáneamente las proyecciones del spin de ortohelio por todas las direcciones podría provocar objeciones, hasta con la esperanza de los parámetros latentes. En la realidad ya basta el número finito de direcciones para demostrar la inconsistencia de la tentativa.

Analicemos cierto grafo finito. Llamemos su *realización* sobre S^2 tal encaje del conjunto de sus vértices en S^2, con el cual la distancia entre los extremos de cualquier arista sea igual a 90°.

12.13. Lema. *Sean* α, β *tales puntos sobre* S^2 *que el seno del ángulo entre sus radios vectores se contenga en* [0, 1/3]. *Entonces existe una realización del grafo* Γ_1: *con la cual* a_0 *pasa a* α, a_9 *a* β.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ un punto de referencia sobre S^2. Traduzcamos a_5 en $\bar{x}$, a_6 en $\bar{z}$.



Pongamos luego para ciertos $\xi, \eta \in R$

$$a_1 \mapsto \frac{\bar{y}+\xi\bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad a_2 \mapsto \frac{\bar{x}+\eta\bar{y}}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Entonces las imágenes a_3 y a_4 se definen salvo los signos por la ortogonalidad a (a_5, a_6), (a_2, a_6) y elijamos

$$a_3 \mapsto \frac{\xi\bar{y}-\bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad a_4 \mapsto \frac{\eta\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Luego de forma análoga pongamos

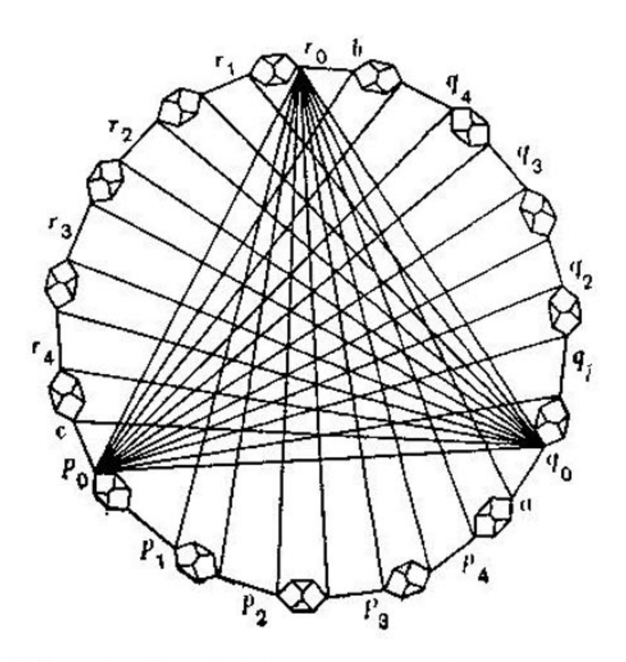
$$a_0 \mapsto \frac{\xi\eta\bar{x}-\xi\bar{y}+\bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2+\xi^2\eta^2}}; \quad a_7 \mapsto \frac{\bar{x}+\eta\bar{y}+\xi\eta\bar{z}}{\sqrt{1+\eta^2+\xi^2\eta^2}}$$

y, por último, salvo el signo se definen a_8 y a_9. El seno del ángulo entre a_0 y a_9 se calcula fácilmente y es igual a

$$\xi\eta/\sqrt{(1+\xi^2+\xi^2\eta^2)(1+\eta^2+\xi^2\eta^2)}.$$

Esta expresión adquiere todos los valores entre 0 y 1/3.

12.14. Lema. *Analicemos el grafo Γ_2 que se obtiene de la figura*



identificando los vértices $a = p_0$, $b = q_0$, $c = r_0$ (las intersecciones visibles de las aristas en el interior de la circunferencia no son vértices).

Este grafo se realiza en S^2.

DEMOSTRACION. Pongamos para $0 \leqslant k \leqslant 4$

$$p_k \mapsto \cos \frac{\pi k}{10} \bar{x} + \operatorname{sen} \frac{\pi k}{10} \bar{y},$$

$$q_k \mapsto \cos \frac{\pi k}{10} \bar{y} + \operatorname{sen} \frac{\pi k}{10} \bar{z},$$

$$r_k \mapsto \operatorname{sen} \frac{\pi k}{10} \bar{x} + \cos \frac{\pi k}{10} \bar{z}.$$

Como sen $(\pi/10) < 1/3$, se puede continuar primeramente esta aplicación hasta realizarse el subgrafo entre los puntos p_0, p_1 y r_0, empleando el lema anterior. Haciendo girar la realización obtenida en torno de r_0, de modo que (p_0, p_1) pase en (p_1, p_2), (p_2, p_3), . . ., obtendremos la

realización del «arco inferior» y r_0. Las rotaciones análogas en torno de las imágenes de p_0 y q_0 brindan la realización de los dos arcos restantes.

12.15. Final de la demostración de la proposición 12.4 y del teorema 12.12. Analicemos la aplicación arbitraria k de los vértices del grafo Γ_1 en $\{0, 1\}$. Supongamos que exactamente un vértice de cada triángulo pasa en 1 y por lo menos uno de los vértices de cada arista pasa en 0. Supongamos que en el triángulo $\{p_0, r_0, q_0\}$ p_0 pasa en 1. Analicemos la copia del grafo Γ_1 entre los vértices p_0, r_0 y p_1 identificándolos con a_0, a_8 y a_9, respectivamente. Debemos tener $k(p_1) = k(a_9) = 1$. En efecto, si $k(a_9) = 0$, entonces $k(a_7) = 1$ y luego $k(a_1) = k(a_2) = = k(a_3) = k(a_4) = 0$, $k(a_5) = k(a_6) = 1$ lo que es una contradicción.

Volvamos ahora a Γ_2. Como $k(r_0) = k(p_1) = 1$ hallamos de forma análoga $k(p_2) = 1$ y luego $k(p_3) = k(p_4) = k(q_0) = 1$. Pero $k(q_0) = 1$ contradice que $k(p_0) = 1$. Con esto termina la demostración.

12.16. Tautologías cuánticas. Este tema casi no está investigado: aduciremos un contraejemplo de Kochen y Specker [36] y la formulación de los recientes resultados de Guelfand y Ponomariov.

a) *Contraejemplo.* Consiste en lo siguiente: se puede señalar la representación del polinomio lógico de 117 variables, la cual será una tautología clásica pero la cual, en el álgebra booleana parcial $B(E^3)$, está definida para ciertos valores de las variables y adquiere el valor de 0. Eso es no más que otro aspecto de la imposibilidad de encajar $B(E^3)$ en el álgebra booleana.

En efecto, sea $P(p, q, r)$ un polinomio lógico de tres variables tal que adquiera el valor de veracidad 1 cuando precisamente uno de los

valores $|p|$, $|q|$, $|r|$ es 1. Se puede considerar que en P entran sólo las conectivas $\vee$, $\wedge$ y $\neg$. De forma análoga, supongamos que $Q(p, q) = \neg p \vee \neg q$: Q adquiere el valor 1, cuando entre $|p|$ y $|q|$ por lo menos exista un 0.

Enumeremos los vértices del grafo Γ_2 con cifras de 1 y 117 y pongamos

$$R(p_1, \ldots, p_{117}) =$$

$$= (\bigwedge_{(i, j, k)} P(p_i, p_j, p_k) \bigwedge_{(r, s)} Q(p_r, p_s))'.$$

El primer producto ha sido tomado por todos los treses (i, j, k) que forman los triángulos en Γ_2, el segundo, por todos los pares (r, s) unidos con la arista en Γ_2.

El razonamiento del p. 12.15 muestra que para cualquier aplicación $\{p_1, \ldots, p_{117}\} \to \{0, 1\}$ por lo menos uno de los factores booleanos adquiere el valor de 0, así que R es una tautología clásica.

Entretanto, si sustituimos p_i por una recta la cual une el origen de las coordenadas con la imagen del i-ésimo vértice en la realización fija del grafo Γ_2, obtendremos como valor de R el elemento $0 \in B(E^3)$.

En efecto, si p_r, p_s son ortogonales, entonces $p_r' \vee p_s' = E^3$; en forma análoga, si p_i, p_j, p_k son ortogonales, entonces $P(p_i, p_j, p_k) = 1 \in B(E^3)$. Esto se repite de modo siguiente: pongamos $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$, entonces

$$P(p, q, r) = p + q + r + p \wedge q \wedge r$$

(con cualquier disposición de los paréntesis), de donde

$$P(p_i, p_j, p_k) = p_i \oplus p_j \oplus p_k = E^3.$$

b) *Resultados de Guelfand y Ponomariov.* Comencemos por la observación siguiente. En el conjunto de subespacios cerrados $B(\mathcal{H})$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $'$ están definidas en todos los puntos aunque dejen de satisfacer los axiomas booleanos, y al despreciar la razón $\ast$ de la mensurabilídad compatible, como si se privaran el sentido físico.

No obstante, es natural investigar también tales estructuras propuestas por primera vez como lógicas cuántico-mecánicas por G. Birkhoff y J. von Neumann. He aquí su axiomatización:

Definición. *Se denomina estructura modular L el conjunto con operaciones binarias* $\wedge$, $\vee$ *las cuales satisfagan las condiciones siguientes:*

a) $\wedge$, $\vee$ *son asociativas y conmutativas;*

b) $a \wedge a = a \vee a = a$ *para todos los* $a \in L$.

c) *Si* $a \wedge b = b$, *entonces* $(a \vee c) \wedge b = b \vee (c \wedge b)$ (*identidad modular*).

Birkhoff y von Neumann exigen además la existencia de la operación del «complemento ortogonal» con axiomas corrientes, pero aquí la omitiremos.

Notemos que la identidad modular en $B(\mathcal{H})$ se cumple universalmente sólo en el caso, cuando $\mathcal{H}$ sea de dimensión finita. La misma se cumple también para todos los treses a, b y c, cuyos elementos tienen una dimensión finita o una codimensión en $\mathcal{H}$.

I. M. Guelfand y V. A. Ponomariov estudiaban las representaciones lineales de las estructuras modulares libres con n generatrices en $B(\mathcal{H})$ para los espacios de dimensión finita sobre los campos arbitrarios. Tal representación se denomina indescomponible, si no se descompone en una suma directa de representaciones en $B(\mathcal{H}_1) \oplus \oplus B(\mathcal{H}_2)$.

Definición. *Se denomina pregunta modular el elemento de la estructura modular libre el cual para cualquier repre-*

sentación indescomponible de dimensión finita adquiere el valor 0 *ó* 1.

Uno de los resultados principales de Guelfand y Ponomariov consiste en la construcción de una serie numerable sumamente no trivial de preguntas modulares. Nos limitaremos a las formulaciones.

Sea L^n una estructura modular libre con n generatrices $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pongamos $I = \{1, \ldots, n\}$.

Llamemos *tolerable* la sucesión de la longitud $l \geqslant 1$: $\alpha = (i_1, \ldots, i_l)$ de elementos de I, si en ella no hay vecinos iguales.

Llamemos *subordinada* a α la sucesión de la longitud $l-1$: $\beta = (k_1, \ldots, k_{l-1})$ de elementos de I, si es tolerable y $\forall j \leqslant l-1$, $k_j \notin \{i_j, i_{j+1}\}$. Pongamos para la tolerable α:

$$a_\alpha = a_{i_1 \ldots i_l} = a_{i_1} \wedge (\bigvee_\beta a_\beta),$$

donde β recorre todas las sucesiones subordinadas a α. Luego, definamos para $t \in \{1, \ldots, n\}$

$$A_t(l) = \bigvee_\alpha a_\alpha,$$

donde α recorre todas las sucesiones tolerables de la longitud l con el último elemento t. Por último, pongamos

$$H_t(l) = \bigvee_{j \neq t} A_j(l).$$

La subestructura en L^n engendrada por los elementos $H_1(l), \ldots, H_n(l)$ se compone totalmente de preguntas modulares para todas las $l \geqslant 1$.

Eso es un resultado difícil; más fácilmente se demuestra que esta subestructura es un álgebra booleana de 2^n elementos. Sustituyendo sus elementos en calidad de valores de las variables en las tautologías booleanas corrientes, obtendremos «tautologías cuánticas», pero para eso es necesario analizar las estructuras con los complementos.

Queda aclarar si se extrae de esta álgebra la física no trivial. Posiblemente, conviene unirla con la técnica de representar los grupos de simetrías.

12.17. Atomo de ortohelio: segunda visita. En conclusión volvamos al átomo de ortohelio S y mostremos, cual aspecto tiene el material del p. 12.2 desde las posiciones generales.

a) *Elección de $\mathcal{H}_S$.* Como se ha explicado en el p. 12.7, al electrón sin spin le responde el espacio

$L^2(E^3)$. Lo que se tiene en cuenta el spin hace introducir una ψ-función de «dos componentes», o sea, pasar al espacio $L^2(E^3) \oplus C^2$. El sistema de dos electrones de helio se describe mediante las ψ-funciones del cuadrado tensorial de este espacio. Pero según el principio de Pauli la ψ-función de este sistema ha de permanecer en la parte del cuadrado tensorial antisimétrica respecto a la reordenación de los electrones. Por eso definitivamente $\mathscr{H}_S = \Lambda^2(L^2(E^3) \oplus C^2)$.

b) *Elección de* H_S. Eso es una tarea difícil, ya que cada electrón se mueve en un campo electromagnético alternativo creado por el núcleo y el segundo electrón. El término principal del hamiltoniano responde al potencial continuo esféricamente simétrico, el cual se obtiene promediando por el tiempo. El resto se examina como una pequeña perturbación. Aduciremos la forma aproximada de la ψ-función del ortohelio, más preciso, del elemento de $\Lambda^2(L^2(E^3))$ que responde a la proyección de $\mathscr{H}_S$ sobre el subespacio de la proyección unitaria del spin:

$$\psi \approx e^{-k(r_1+r_2)}[(C_1 + C_2(r_1+r_2) + C_4 r_{12} +$$
$$+ C_5 r_{12}(r_1+r_2)\,\mathrm{sh}\,C_0(r_1-r_2) +$$
$$+ (r_1-r_2)(C_3 + C_6 r_{12})\,\mathrm{ch}\,C_0(r_1-r_2)].$$

Aquí

$$r_i = \Big(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2\Big)^{1/2}, \quad i=1,2; \quad r_{12} = \Big(\sum_{j=1}^{3}(x_{1j}-x_{2j})^2\Big)^{1/2};$$

la constantes k, C_0, . . ., C_6 se encuentran experimentalmente.

c) *Simetrías aproximadas*. En el espacio $\mathscr{H}_S$ actúa un grupo $SU(2)$: sobre $L^2(E^3)$ a través de su cociente $SO(3)$, sobre C^2 con su representación estándar. Eso es el grupo de simetrías aproximadas del sistema: la ψ-función de ortohelio «no se aleja demasiado» del subespacio que responde a la representación conveniente de $SU(2)$, lo que permite hablar acerca del número principal (n), orbital (j) y otros números cuánticos del estado como en el átomo de hidrógeno.

d) *Spin*. El operador del momento angular completo J conmuta con el hamiltoniano $\mathscr{H}_S$. En el estado $n = 2$, $j = 1$ su valor propio es igual a 2 (en unidades atómicas). El subespacio propio $N \subset \mathscr{H}_S$ que responde a este valor es tridimensional. Luego, los operadores de los cuadrados

de las proyecciones del spin J_x^2, J_y^2 y J_z^2 conmutan dos a dos (eso es una peculiaridad del spin 1).

Denotando por P el proyector $\mathcal{H}_S$ sobre N, obtenemos la posibilidad de encajar el álgebra booleana parcia $B(E^3)$ en $B(\mathcal{H}_S)$ confrontando la imagen del operado PJ_α^2 en $\mathcal{H}_S$ con la recta $\alpha \subset E^3$. Esto reemplaza en cierto grado el cuadro ingenuo del p. 12.2.

Apéndice. Universo de von Neumann

1. Las premisas de la teoría «ingenua» cantoriana de conjuntos se reducen a lo siguiente: el conjunto puede componerse de distintos elementos cualesquiera (del mundo físico o intelectual); el conjunto se define unívocamente por el juego de sus elementos; cualquier propiedad define el conjunto de los objetos que poseen dicha propiedad.

La misión del lenguaje formal de la teoría de conjuntos L_1 Set es describir una clase más acotada de conjuntos (universo) que los cantorianos. Una parte de esas acotaciones se debe a las consideraciones de la comodidad, la otra, al deseo de evitar las tal llamadas paradojas. Eso proporciona una «estimación superior» para las clases a analizar. La «estimación inferior» se determina por el deseo de que la clase de conjuntos a analizar sea cerrada con respecto a todas las construcciones matemáticas necesarias para realizar una u otra parte (en caso ideal, «todas») de las matemáticas no formales.

2. En pos de Zermelo, von Neumann y otros analizamos dos acotaciones principales para los conjuntos.

a) Solamente los conjuntos pueden ser elementos de los conjuntos. En particular, en el universo V de von Neumann (véase a continuación) cualquier cadena de inclusiones $X_0 \ni X_1 \ni \ni X_2 \ni \ldots$ se rompe y, por consiguiente, su

último elemento obligatoriamente es un conjunto vacío. De este modo, todos los conjuntos de V se construyen «de nada».

b) La suposición de que toda población de conjuntos, aunque sean tales como éstos, de nuevo forme un conjunto de V, conduce inmediatamente a la contradicción (Burali — Forti, Russel y otros). En particular, la población de todos los conjuntos del universo no es elemento de V. Por eso se requiere una formulación exacta (por lo menos de la parte) de las operaciones que no conducen fuera de los límites de V. Dos lenguajes formales principales de la teoría de conjuntos —de Gödel — Bernaus y de Zermelo — Fraenkel— se distinguen en nombres de cuáles objetos son los símbolos de las variables en la interpretación estándar en V. Según Zermelo — Fraenkel (nuestro L_1 Set) éstos son los nombres de los conjuntos. Según Gödel — Bernaus éstos son los nombres de tales poblaciones de conjuntos — clases que «no obligatoriamente son conjuntos», y la propiedad de la clase «ser conjunto» se define especialmente como propiedad de «ser elemento de otra clase». El lenguaje de Gödel — Bernaus ha sido examinado en el cap. 4 del libro de Mendelson [2]. En este párrafo describiremos el universo de von Neumann, usando los medios corrientes de las matemáticas no formales. La relación de esta construcción al formalismo se examinará en el p. 18.

3. Primeros pisos. El universo de von Neumann se construye inductivamente a partir del conjunto vacío, empleando sucesivamente la operación $\mathcal{P}$: «conjunto de todos los subconjuntos». De este modo:

$V_0 = \varnothing$,

$V_1 = \mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$

$\cdots$

$V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n),$

$\cdots$

Es fácil ver que $V_n \subset V_{n+1}$ (a continuación se lo demostrará en plena comunidad). El piso V_n se compone de $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ ($n - 1$ doses) conjuntos finitos cuyos elementos, a su ver, son los conjuntos finitos, etc. No se puede salir fuera de los límites de los conjuntos finitos, si no se recurre al análisis de todos los V_n como «ya construidos», a cuya unión de nuevo se aplica la operación $\mathcal{P}$. Pongamos

$$V_{\omega_0} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n,$$

$$V_{\omega_0} + 1 = \mathcal{P}(V_{\omega_0}),$$

$\cdots$

Los índices mediante los cuales se denotan ahora los pisos son nombres de los primeros ordinales infinitos. Esa magnífica idea de iteración transfinita de las construcciones pertenece a Cantor que la aplicó por primera vez a la investigación de las series trigonométricas y luego investigó sistemáticamente hallando en ella la llave para el infinito.

En el transcurso de los dos puntos más próximos nuestros conjuntos provisionalmente serán conjuntos cantorianos. Volvamos al universo V después de familiarizarnos un poco con los ordinales.

4. Ordinales. *Sea X cierto conjunto, en el cual va prefijada la relación binaria $<$.* Examinemos las propiedades de esta relación:

a) $Y \not< Y$ *para todos los* $Y \in X$; *si* $Y_1 < Y_2$ *e* $Y_2 < Y_3$, *entonces* $Y_1 < Y_3$;

b) *para cualesquier* $Y, Z \in X$, *ora* $Y < Z$, *ora* $Z < Y$, *ora* $Y = Z$;

c) *cualquier subconjunto* X *no vacío posee el elemento mínimo (en el sentido de* $<$*).*

La relación $<$ *ordena parcialmente* X si satisface a); *ordena linealmente* X si satisface a) y b); *ordena bien* X si satisface las tres condiciones a), b) y c).

Sea $(X, <)$ bien ordenado. *El segmento inicial* $\hat{Y}$ definido por el elemento $Y \in X$ es el conjunto bien ordenado $(Z, <)$, donde $Z = \{Y' \mid Y' < < Y\}$. Como es de costumbre, hablando de un conjunto bien ordenado, podemos omitir la indicación explícita del orden si ésta se infiere obviamente del contexto.

5. Lema. *Sean* X *e* Y *dos conjuntos bien ordenados. Entonces tiene lugar exactamente una de las tres alternativas:*

a) X *e* Y son isomorfos;

b) X *es isomorfo al segmento inicial de* Y.

c) Y *es isomorfo al segmento inicial de* X.

El isomorfismo, cuya existencia se afirma, está definido unívocamente.

DEMOSTRACIÓN. Partamos el razonamiento en varios pasos.

a) Supongamos que X es bien ordenado, $f : X \to X$ es una aplicación monótona, es decir, $Z_1 < Z_2 \Rightarrow f(Z_1) < f(Z_2)$. Entonces tenemos $f(Z) \geqslant Z$ para todos los $Z \in X$. En efecto, entre los elementos que carecen de esta propiedad habrá que existir, digamos, el mínimo Z_0. Pero de $f(Z_0) < Z_0$ y de la monotonía de f se seguiría que $f(f(Z_0)) < f(Z_0)$, así que se hallaría un elemento aún menor.

b) Por eso X no es isomorfo a ninguno de sus segmentos iniciales $\hat{X}_1$: si $f: \hat{X} \rightrightarrows \hat{X}_1$, entonces $f(X_1) \subset X_1$.

c) Supongamos ahora que X e Y están bien ordenados. Pongamos $f = \{\langle X_1, Y_1\rangle \mid X_1 \in X, Y_1 \in Y$ y existe el isomorfismo $\hat{X}_1$ con $\hat{Y}_1\}$. Ante de todo, $f \subseteq X \times Y$ es el gráfico de la aplicación biunívoca $pr_1 f$ en $pr_2 f$. En verdad, si $X_1 \neq X_2$, digamos $X_1 < X_2$, entonces en virtud de b) $\hat{X}_1$ no es isomorfo a $\hat{X}_2$; según la simetría lo mismo es justo para f^{-1}. De aquí se ve que f y f^{-1} son monótonas.

Luego, si $X_1 \in pr_1 f$ y $X_2 < X_1$, entonces $X_2 \in pr_1 f$ y de forma análoga para $pr_2 f$.

Mostremos, por último, que ora $pr_1 f = X$ ora $pr_2 f = Y$. En los demás casos existe un mínimo elemento X_1 de $X \setminus pr_1 f$ y un mínimo elemento Y_1 de $Y \setminus pr_2 f$. Pero en virtud de lo anteriormente dicho f induce el isomorfismo $\hat{X}_1$ con $\hat{Y}_1$. Según la definición de f entonces $\langle X_1, Y_1\rangle \in f$ es una contradicción.

d) Todo lo dicho significa que ora f es un isomorfismo (más exactamente, su gráfico) del conjunto X sobre el segmento inicial de Y o Y, ora f^{-1} es un isomorfismo de Y sobre el segmento inicial de X. De la definición de f está claro que el gráfico de cualquier otro isomorfismo debe contenerse en el gráfico f, de donde sigue la unicidad. El lema queda demostrado.

En calidad de una definición preliminar podemos ahora analizar la clase de todos los conjuntos bien ordenados isomorfos al X dado bien ordenado y denominarlo ordinal. Dos ordinales α y β están enlazados con las relaciones $\alpha = \beta$, $\alpha \prec \beta$ o $\alpha \succ \beta$, dependiendo de cual de las tres alternativas del lema 5 se cumple para los representantes de $X \in \alpha$, $X \in \beta$ (de la elección de los representantes esta relación quizá no depende).

El paso siguiente consiste, naturalmente, en analizar «todos» los ordinales como clase y mostrar que $\prec$ induce en la misma la relación del orden completo, obteniendo de tal manera una escala universal del orden completo. No obstante, aquí se origina una complicación excesiva: la clase de conjuntos bien ordenados isomorfos al X dado es demasiado grande, y la clase de ordinales ha de ser una «clase de clases» lo que complica sin sentido la cosa. A von Neumann le pertenece un elegante hallazgo técnico que elimina esta dificultad: examinar, en vez de la variedad de las relaciones de orden impuestas sobre X de afuera, la única relación dada por las propiedades interiores.

6. Definición. *Se denomina ordinal el conjunto de conjuntos X que está bien ordenado por la relación $\in$ entre sus elementos y transitivo, es decir, satisface la condición: si $Z \in Y \in X$, entonces $Z \in X$.*

7. Teorema. a) *La clase de ordinales* On *está bien ordenada por la relación $\alpha \in \beta$ (la denotaremos también por $\alpha < \beta$).*

b) *Cualquier conjunto bien ordenado es isomorfo al ordinal α unívocamente determinado, así como al segmento inicial de ordinales (menores que $\alpha \cup \{\alpha\}$)* unívocamente determinado.

DEMOSTRACIÓN. a) Tenemos que verificar las afirmaciones a), b) y c) del p. 4. La primera de ellas sigue inmediatamente de la definición. Para demostrar b) analicemos dos ordinales α, β. Según el lema 5 existe un isomorfismo f de uno de ellos (digamos, de α) sobre el segmento inicial β o sobre β. Mostremos que en este caso $\alpha \in \beta$ ó $\alpha = \beta$. Con este fin establezcamos que $f(\gamma) = \gamma$ para todos los $\gamma \in \alpha$. En efecto, si γ_1 es el elemento mínimo con $f(\gamma_1) \neq \gamma_1$, entonces $f(\gamma_2) = \gamma_2$ para todos los $\gamma_2 \in \gamma_1$. Como f es

un encaje isomorfo de α respecto de la ordenación de $\in$ y γ_1 y $f(\gamma_1)$ son conjuntos, tenemos

$$f(\gamma_1) = \{f(\gamma_2) \mid \gamma_2 \in \gamma_1\} = \{\gamma_2 \mid \gamma_2 \in \gamma_1\} = \gamma_1$$

en contradicción con la elección de γ_1. El mismo razonamiento muestra que $f(\alpha) = \alpha$, de donde sigue lo requerido.

Por último, supongamos que C es una clase no vacía de ordinales, $\alpha \in C$. Si α no es el mínimo en C, entonces el elemento mínimo de la intersección $\alpha \cap C$ será el mínimo en C.

b) Sea X cierto conjunto bien ordenado. Denotemos por S el conjunto de ordinales isomorfos a cualquier segmento inicial de X. Ese conjunto no es vacío, por ejemplo, el ordinal $\{\varnothing\}$ es isomorfo al segmento que se compone del elemento mínimo de X.

El conjunto $\beta = \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$, como se ve fácilmente, es un ordinal isomorfo a X. En efecto, si eso no fuese así, β sería isomorfo al segmento inicial de X (digamos, a $\hat{X}_1$), pero en este caso el ordinal $\beta \cup \{\beta\}$, mayor que β, sería isomorfo al segmento inicial $\hat{X}_1 \cup \{X_1\}$ a pesar de la definición de β.

He aquí las propiedades elementales de los ordinales.

8. a) Los ordinales finitos son «números naturales» (y cero) de los primeros pisos del universo V. Así se los denotaremos a menudo: $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$ lo que está en conformidad con la identificación en el p. 8a para los α finitos.

b) El ordinal que le sigue directamente al α dado es $\alpha \cup \{\alpha\}$. Este se denota también por $\alpha + 1$, lo que para los α finitos está en conformidad con la identificación en el p. 8a.

c) Se llama *límite* el ordinal β si $\beta \neq \varnothing$ y

$\beta \neq \alpha + 1$ para ningún α. El primer ordinal límite ω_0 como un conjunto bien ordenado es isomorfo a $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Si α es un ordinal límite, entonces $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$. Es justo también lo contrario.

Los ordinales se utilizan para los tres fines principales: para las demostraciones con ayuda de la inducción (transfinita), las construcciones con ayuda de la recursión (transfinita) y para medir las potencias. He aquí los principios fundamentales.

9. Inducción transfinita.. *Supongamos que C cierta clase de ordinales, siendo*

a) $\varnothing \in C$;

b) *si* $\alpha \in C$, *entonces* $\alpha + 1 \in C$;

c) *si el conjunto de ordinales* $\{\alpha_i\}$ *está contenido como un subconjunto en* C, *entonces* $\bigcup \alpha_i \in C$. *En este caso C contiene todos los ordinales.*

En efecto, si no, existiría un ordinal mínimo que no esté contenido en C, pero que no pudiera ser vacío en virtud de a), límite en virtud de c) ni cualquier otro en virtud de b). En las aplicaciones concretas la verificación de a) y c) a menudo resulta trivial y se omite.

10. Recursión transfinita. *Sea G cierta función de los conjuntos (a continuación será suficiente considerar que la misma está definida sobre todos los conjuntos del universo) con valores en los conjuntos. Entonces existe una única función de los ordinales F que satisface la correlación:*

$F(\alpha) = G$ *(conjunto de valores F sobre los elementos* α*).*

En efecto, esta correlación define de modo unívoco $F(0) = G(\varnothing)$, luego $F(1) = G(\{F(0)\})$, $F(2), \ldots$ De este modo, si examinamos la clase C de tales ordinales α que F con la propiedad necesaria puede ser determinada

en el segmento inicial de los ordinales $<\alpha$, entonces dicha clase satisfará las condiciones 9a — c y, por tanto, contiene todos los ordinales. La unicidad se establece al mismo tiempo (si $F \neq \neq F'$, se examinará el α mínimo con $F(\alpha) \neq \neq F'(\alpha)$).

11. Medición de potencias. Distintos ordinales pueden ser equipotentes, por ejemplo, todos los ordinales ω_0, $\omega_0 + 1$, $\omega_0 + 2$, . . . (¡y muchos subsiguientes!) son numerables. No obstante, el salto de potencia se origina tan lejos como se quiera.

Llámase cardinal el ordinal que no está equipotente a ningún ordinal antecedente.

Tales son todos los ordinales finitos y ω_0. Cualquier cardinal infinito naturalmente es un ordinal límite. Luego, cualquier conjunto es equipotente al cardinal, y por lo demás, al único (véase el § 1 del cap. III). Los cardinales infinitos forman una clase bien ordenada la cual, naturalmente, se denomina ordinales. Pues bien,

ω_0 = primer ordinal numerable;

ω_1 = primer ordinal de potencia $>\omega_0$ = conjunto de todos los ordinales numerables y finitos;

ω_2 = primer ordinal de potencia $>\omega_1$ = conjunto de todos los ordinales de potencia $\leqslant \omega_1$, etc.

Ahora podemos introducir nuestra definición principal.

12. Definición. *Se llama universo V (de von Neumann) de clase de conjuntos* $\bigcup\limits_{\alpha \in On} V_\alpha$, *donde el conjunto* V_α *se define por la siguiente recursión transfinita:*

$$V_0 = \varnothing,$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha),$$

$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, *si* α *es un ordinal límite.*

Aduzcamos ciertas propiedades elementales del universo V.

13. *Cada conjunto* V_α *es transitivo: si* $Y \in X \in V_\alpha$, *entonces* $Y \in V_\alpha$ *(con otras palabras,* $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$*).*

Supongamos que eso no es justo. Entonces ha de existir el mínimo ordinal α con $V_\alpha \nsubseteq V_{\alpha+1}$, siendo $\alpha \geqslant 2$. Si α no es límite, $\alpha = \beta + 1$, $Y \in X \in V_\alpha$ e $Y \notin V_\alpha$, entonces la contradicción se obtiene así:

$$X \in V_{\beta+1} = \mathscr{P}(V_\beta) \Rightarrow X \subseteq V_\beta \Rightarrow Y \in V_\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y \in V_{\beta+1} = V_\alpha,$$

puesto que para β aún se justo que $V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$ según la elección de α. Si α es límite, se alcanza la contradicción análogamente (hallamos $\gamma < \alpha$ con $Y \in X \in V_\gamma$, $\gamma \notin V_\alpha$).

Definamos el rango de cualquier conjunto $X \in V$: el rango $X = \alpha$ si $X \in V_{\alpha+1}$, y eso es el mínimo α con tal propiedad. Si $Y \in X$, entonces el rango de $X \geqslant$ rango $Y + 1$.

14. *Todos los ordinales pertenecen a* V; *(rango* $\alpha) = \alpha$.

Mostremos primeramente que $\alpha \in V_{\alpha+1}$ para todos los ordinales α. Eso es así para $\alpha = 0$. Supongamos que α es el ordinal mínimo con $\alpha \notin V_{\alpha+1}$. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\beta \in V_{\beta+1}$, de donde β, $\{\beta\} \in V_{\beta+2} = \mathscr{P}(V_{\beta+1})$ y, por tanto, $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} \in V_{\beta+2} = V_{\alpha+1}$ lo que es una contradicción. Pero si α es un ordinal límite, entonces $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ y $\beta \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$ según la elección de α. así que $\alpha = \bigcup_{\beta>\alpha} \beta \cup V_\beta = V_\alpha$ y $\alpha \in \mathscr{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$ lo que es una con-

tradicción. De este modo, el rango $\alpha \leqslant \alpha$; en forma análoga se demuestra la igualdad estricta.

15. El universo V está cerrado con respecto a las operaciones estándares sobre los conjuntos: diferencia, unión, intersección, formación de $\mathcal{P}(X)$ y $\bigcup_{Y \in X} Y$, «recolección» de conjuntos numerados por cierto conjunto $\{X_Y \mid Y \in Z\}$. En particular, si $X, Y \in V_\alpha$, entonces el par $\{X, Y\} \in V_{\alpha+1}$. Escribimos $\{X\}$ en lugar de $\{X, X\}$.

16. Los productos directos, razones y funciones pueden ser definidos también como elementos de V con ayuda del procedimiento propuesto por Kuratowski. La representación intuitiva acerca de un par de conjuntos ordenado X, $Y \in V$ se realiza con ayuda del conjunto

$$\langle X, Y\rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}.$$

Los pares ordenados como elementos de V se caracterizan por las propiedades siguientes: esos son conjuntos de dos elementos X', Y'; uno de éstos es un subconjunto del otro (digamos, $X' \subseteq Y'$); si $X' \subseteq Y'$, entonces $X' = \{X\}$ es un conjunto de un elemento y su único elemento X se llama primer elemento del par; Y' es no más que un conjunto de dos elementos, y su elemento Y (si existe) distinto de X o el mismo X (en el caso contrario) se llama segundo elemento del par. Por eso $\langle X, Y\rangle = \langle X', Y'\rangle$, cuando y sólo cuando $X = X'$, $Y = Y'$, lo que justifica la denominación. Subrayemos que esa definición se introduce para que, al construir productos directos, no se salga fuera de los límites de V y para que el conjunto que responda al producto directo pueda ser descrito sólo mediante los términos de relación $\in$, o sea, en el lenguaje L_1 Set.

La n-ena de conjuntos ordenada se define como

$$\langle X_1, \ldots, X_n \rangle = \langle \ldots \langle\langle X_1, X_2 \rangle, X_3 \rangle \ldots \rangle.$$

Producto directo:

$$X \times Y = \{\langle U, W \rangle \mid U \in X, W \in Y\}.$$

De forma análoga

$$X_1 \times \ldots \times X_n = (\ldots ((X_1 \times X_2) \times X_3) \ldots).$$

Notemos que, hablando en general, $(X \times Y) \times Y \neq X \times (Y \times Z)$: entre estos conjuntos existe solamente una correspondencia biunívoca canónica. Su identificación y la inscripción $X \times Y \times Z$ es una soltura, como regla general, inofensiva.

La relación (o correspondencia) *binaria* r es un conjunto (o una clase), cuyos elementos son solamente pares ordenados. Si $r \in V$ es una relación, entonces el campo de definición dom (r) es una clase de todos los primeros términos de los elementos de r, y el campo de valores rng (r) es una clase de todos los segundos términos.

La función es una relación binaria, cada elemento de la cual se define unívocamente por su primer término. De este modo, las funciones como aplicaciones de los conjuntos en V se identifican con sus gráficos. Si f es una función, escribimos a menudo $W = f(U)$ en vez de $\langle U, W \rangle \in f$. Además,

$$f^{-1}(X) = \{Y \mid f(Y) \in X\},$$

$$f|_X = \{\langle U, W \rangle \in f \mid U \in X\rangle\}.$$

La familia $\{X_Y\}_{Y \in Z}$ como elemento de V es, según la definición, una función que se compone de los pares $\{\langle Y, X_Y \rangle \mid Y \in Z\}$, etc.

Subrayemos una vez más: lo más importante en estas definiciones es lo que no introducimos

nuevos objetos, salvo los elementos de V, ni relaciones cualesquiera, salvo las que pueden ser expresadas en los términos de $\in$. Vale también notar que de acuerdo con la comprensión corriente (extensional) *la propiedad* de los elementos del conjunto X de V es *el conjunto* $Y \subseteq X$ (que se compone de todos los elementos con esta propiedad). Por eso $Y \in V$, así que las propiedades, y las propiedades de propiedades, y las propiedades de los conjuntos de propiedades... (con iteración transfinita) son elementos de V.

El universo V merece su nombre.

17. Mostremos, por último, que las cadenas $X_1 \ni X_2 \ni \ldots$ de elementos de V se rompen (desde luego, en el conjunto vacío). Estableceremos que si X no es vacío, entonces existe $Y \in X$ con $Y \cap X = \varnothing$ (la ruptura de las cadenas se obtiene, si se aplica esta afirmación al conjunto X de términos de la cadena). En efecto, sea Y un elemento del rango mínimo en X (dicho elemento existe, ya que los rangos, siendo ordinales, están bien ordenados). Si resultase que $X \cap Y \neq \neq \varnothing$, entonces el elemento $Z \in X \cap Y$ tendría un rango menor que el de Y, lo que es una contradicción.

18. Enlace con los axiomas de L_1 Set. El punto de vista adoptado en este libro consiste en lo siguiente.

Las representaciones intuitivas acerca de los conjuntos, a los cuales recurrimos en la exposición anterior construyendo el universo V son materia primaria. El lenguaje L_1 Set ha sido ideado para escribir textos formales equivalentes a nuestros razonamientos no formales respecto de V. Los axiomas de L_1 Set (incluso los axiomas lógicos) se han obtenido como resultado del análisis de las demostraciones no formales. De criterio de la completitud de su lista sirve la posibilidad de

escribir una conclusión formal que es la traducción de cualquier demostración no formal. Esta posibilidad debe ser demostrada por el compendio de textos formales de volumen suficiente. El lector los hallará en otros libros.

En particular, en L_1 Set se puede escribir y deducir de los axiomas la fórmula «$\forall x \exists$ es ordinal de α $(x \in V_\alpha)$» la cual formalmente refleja nuestra restricción por los conjuntos de V.

La cuestión acerca del carácter no contradictorio formal de los axiomas de Zermelo—Fraenkel debe quedar objeto de crédito, hasta que y ya que no sea demostrado su carácter contradictorio. Todas las demostraciones que se basaban en ellos, hasta la actualidad no han conducido a la contradicción, pero han desarrollado ante nosotros un rico mundo de las matemáticas clásicas y contemporáneas. Este mundo posee cierta realidad y vida interior que poco depende de los formalismos destinados a describirlo.

El descubrimiento de una contradicción en cualquiera de estos formalismos si tuviese lugar servirá solamente de aclaración, precisión y, posiblemente, de reconstrucción de nuestras representaciones, pero no de su fracaso como lo sucedía muchas veces en el pasado.

Capítulo III

Problema del continuo y forcing

1. Problema; resultado; ideas

1.1. A Cantor le pertenecen dos ideas fundamentales en la teoría de conjuntos infinitos; el descubrimiento (¿o invención?) de la escala de sus potencias y la demostración del carácter ilimitado de la misma.

Recordemos que dos conjuntos M, N se llaman *equipotentes* (inscripción: card M = card N), si entre ellos existe una correspondencia biunívoca. Escribimos card $M \leqslant$ card N, si M es equipotente a la parte de N. Decimos que M y N *son comparables*, si o bien card $M \leqslant$ card N, o bien card $N \leqslant$ card M. Escribimos card $M >$ card N, si card $M \geqslant$ card N, pero M y N no son equipotentes.

1.2. Teorema (Cantor, Schröder, Bernstein, Zermelo).

a) *Dos conjuntos cualesquiera son comparables. Si* card $M \leqslant$ card N y card $N \leqslant$ card M *simultáneamente, entonces* card M = card N. *Hablando brevemente: las potencias están linealmente ordenadas.*

b) *Sea* $\mathcal{P}(M)$ *un conjunto de todas las partes (subconjuntos) de* M. *Entonces* card $\mathcal{P}(M) >$ card M. *En particular, no existe la potencia más grande.*

c) *En cualquier clase de potencias existe la mínima. Hablando brevemente: las potencias están bien ordenadas.*

DEMOSTRACIÓN. a) Sea M equipotente a la parte $M' \subseteq N$ y N, equipotente a la parte $N_1 \subseteq \subseteq M \sim M'$. Identifiquemos M con M'. Obtendremos tres conjuntos $N_1 \subseteq M \subseteq N$ y la aplicación biunívoca $f: N \to N_1$. Pero se ha de construir la aplicación biunívoca $g: N \to M$. He aquí su descripción explícita:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in f^n(N) \setminus f^n(M) \text{ para cierto } n \geqslant 0, \\ x \text{ en el caso contrario} \end{cases}$$

Aquí $f^n(y) = f(f \ldots f(y) \ldots)$ (n veces); $f^n(N) = \{f^n(y) \setminus y \in N\}$.

Se deja al lector efectuar la verificación de las propiedades de f.

Para demostrar la comparabilidad de dos conjuntos cualesquiera basta establecer que cualquier conjunto puede estar bien ordenado, la comparabilidad de los conjuntos bien ordenados se infiere del lema 5 del apéndice para el cap. II.

Sea M cierto conjunto. Elijamos para cada subconjunto $N \subseteq M$ no vacío su cierto elemento con $(N) \in N$. Llamemos *tolerable* (con respecto a c) la buena ordenación $<$ del subconjunto $M' \subseteq M$, si $c(M \setminus \hat{X}) = X$ para todos los $X \in M'$, donde $\hat{X} = \{Y \mid Y \in M', Y < X\}$.

Si $M' \neq M''$ son los subconjuntos M, para los cuales existen buenas ordenaciones tolerables, entonces uno de los mismos es el segmento inicial del segundo y las ordenaciones están concordadas.

En efecto, como se demuestra en el p. 7a del apéndice, el isomorfismo canónico de f, digamos, M' con el segmento inicial M'' es el

encaje idéntico: si $f(X) \neq X$ y X es el mínimo con tal propiedad, entonces $f(\hat{X}) = \hat{X}$, $X = c(M \setminus \hat{X}) \Rightarrow X = c(M \setminus f(\hat{X})) = f(X)$ lo que es una contradicción.

Ahora se establece fácilmente que la misma unión M' de todos los subconjuntos M que tengan una ordenación tolerable con respecto a c está tolerablemente ordenada y coincide con M, puesto que en el caso contrario se la podría encajar en $M' \cup \{c(M \setminus M')\}$.

De aquí, en particular, se sigue que cualquier conjunto es equipotente a cierto ordinal y, por consiguiente, al único cardinal. Eso justifica la notación card para la potencia y el uso de los cardinales como escala estándar de potencias (véase el apéndice, p. 11).

b) Como $\mathcal{P}(M)$ contiene todos los subconjuntos de un elemento M, card $\mathcal{P}(M) \geqslant$ card M. Además, ninguna aplicación $f: M \to \mathcal{P}(M)$ no puede ser biunívoca (ni siquiera aplicación sobre). En efecto, pongamos

$$N = \{z \mid z \notin f(z)\} \in \mathcal{P}(M)$$

y demostremos que N no se encuentra en la imagen f. La suposición acerca de la existencia de $n \in M$ tal que $N = f(n)$ inmediatamente se reduce a la contradicción, si examinamos la posición de n respecto de N:

$n \in N \Rightarrow n \in f(n) \Rightarrow n \notin N$ según la definición de N;

$n \notin N \Rightarrow n \notin f(n) \Rightarrow n \in N$ según la definición de N.

Eso es el célebre «proceso diagonal» de Cantor.

c) La buena ordenación de las potencias se establece simultáneamente con la comparabilidad

en los primeros pasos de la teoría de los ordinales (véase el apéndice al cap. II).

1.3. OBSERVACIÓN. La referida demostración del lema acerca de la posibilidad de ordenar bien cualquier conjunto pertenece, en realidad, a Zermelo. La misma fue, probablemente, el motivo más serio para someter a fuerte crítica el axioma sobre la elección. En efecto, las representaciones intuitivas que siguen dicha demostración se reducen a la receta: sacar un elemento del conjunto M tras otro hasta que todo el M sea agotado. En tal forma el carácter inconcebible «físico» de la prescripción salta a los ojos, y a muchos contemporáneos toda la demostración les parecía no más que un truco. La proposición de sacar «primeramente» de cada subconjunto $N \subseteq M$ el elemento $c(N)$ provocó, por ejemplo, tal objeción de Lebesgue. Si los elementos escogidos no están dotados de ningunas propiedades especiales, entonces ¿cómo podemos estar seguros de que en el proceso de todo el razonamiento continuemos pensando en los mismos elementos?

En la actualidad los matemáticos trabajadores, a excepción de los especialistas en fundamentos de las matemáticas, casi no están propensos a percibir estas dudas.

Planteemos ahora la tarea principal de la cual nos ocuparemos en este capítulo. Escribiremos card $\mathcal{P}(M) = 2^{\text{card } M}$ por la analogía con el caso finito. El continuo es 2^{ω_0}.

1.4. Problema del continuo. *¿Cuál es el lugar del continuo en la escala de potencias?*

Según el teorema 1.2 b) $2^{\omega_0} \geqslant \omega_0$. Por eso en todo caso $2^{\omega_0} \geqslant \omega_1$. Si, pues, $2^{\omega_0} > \omega_1, > > \omega_2, \ldots, > \omega_n$ para n cualquiera, entonces $2^{\omega_0} > \omega_{\omega_0}$, puesto que el continuo no puede ser unión del conjunto numerable de los subconjuntos de menor potencia (König).

1.5. Hipótesis del continuo (HC): $2^{\omega_0} = \omega_1$. La hipótesis generalizada del continuo afirma que $2^{\mathrm{card}\, M}$ sigue directamente en pos de card M para cualquier M infinito. He aquí casi todos los conocimientos nuestros acerca de esto.

1.6. Teorema. a) *La negación de la hipótesis del continuo no puede ser deducida de los demás axiomas de la teoría de los conjuntos, si éstos no son contradictorios* (*Gödel*).

b) *La hipótesis del continuo no puede ser deducida de los demás axiomas de la teoría de los conjuntos, si éstos no son contradictorios* (*Cohen*).

Lo mismo es justo también para la hipótesis generalizada del continuo.

Si se acepta que los axiomas de la teoría de los conjuntos y los medios lógicos de deducción en el lenguaje L_1 Set que se sobreentienden en la formulación agotan de hecho el aparato demostrativo de las matemáticas actuales, se puede decir que el problema del continuo representa en sí un ejemplo de un problema absolutamente insoluble. Aunque el teorema de Gödel sobre la incompletitud brinde ejemplos concretos de opiniones insolubles en cualquier sistema formal con propiedades sensatas, éstos se resuelven de un modo «obvio» en cierto sistema superior. La situación con el problema del continuo tiene un aire mucho más difícil. Si se reconoce que dicho problema es comprensivo, se lo puede solucionar solamente por introducción de un nuevo principio de demostración. Aunque se discutían distintas posibilidades de ello, los nuevos axiomas de la teoría de los conjuntos propuestos no parecen ser suficientemente convincentes, ni, lo principal, bastante eficaces en las «grandes» matemáticas. En el transcurso de cien años después de la introducción de la inducción transfinita ningún nuevo método de la construcción de los con-

juntos no se puso en circulación. Entretanto, la idea de demostración del teorema de Gödel 1.6 a) precisamente consiste en la verificación de lo que todos los métodos anteriores permiten construir no más que ω_1 subconjuntos en la serie natural (o de números reales).

1.7. Idea de Gödel. Gödel examina las operaciones de la teoría de conjuntos principales: la formación del par, el producto, complemento, la suma, etc., y construye la clase de todos los conjuntos que se obtienen por iteración transfinita de estas operaciones partiendo de $\varnothing$. Tales conjuntos se denominan constructivos. De antemano totalmente no está claro si es constructivo todo conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ o, más general, si es constructivo todo conjunto del universo V. (Resulta que este problema formalmente es tan insoluble como el del continuo.) No obstante, dentro de la clase de conjuntos constructivos el número de subconjuntos $\{0, 1, 2, \ldots\}$ resulta igual a ω_1, porque, lo más probable, hemos omitido la masa de subconjuntos no constructivos. Al mismo tiempo, todos los axiomas de la teoría de los conjuntos limitados para esta clase resultan, en el sentido sensato de la palabra, ciertos al igual que todas las deducciones de los mismos. Por eso la negación de HC no es deductivo siendo irreal en este modelo.

En este libro no se expone la demostración de Gödel, véase, por ejemplo, [20].

1.8. Idea de Cohen. La exponemos a continuación en la variante de D. Scott y Solovey y, además, a base de un problema modal.

Discutiremos HC en la forma siguiente: *no existe ningún subconjunto de números reales R cuya potencia sea estrictamente intermedia entre las potencias* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ y R.

En efecto, si $2^{\omega_0} > \omega_1$, entonces el conjunto de

la potencia ω_1 en R tendría una potencia intermedia.

Para establecer que esta afirmación es indemostrable, lo que equivale al teorema de Cohen, basta construir un modelo de números reales, en el cual se cumplan todos los axiomas y corolarios de los mismos, mientras que exista el conjunto de la potencia intermedia.

De este modelo servirá el conjunto $\bar{R}$ de números aleatorios en el espacio probabilístico muy grande Ω. Escogiendo Ω se puede hacer $\bar{R}$ tan grande que entre $\bar{N}$ (números enteros del modelo) y $\bar{R}$ (continuo del modelo) habrá un conjunto de potencia intermedia sumergido en $\bar{R}$ dentro del modelo.

Desde luego, la cosa no puede ser tan sencilla y a la ejecución del programa le ha de molestar algo. Molesta lo que casi todas las propiedades de R, incluso la mayoría de los axiomas, resultan falsos para $\bar{R}$, así que $\bar{R}$ no puede servir de modelo a R en el sentido corriente de la palabra. El modo de vencer esta dificultad es el que constituye la idea principal de Cohen. Cohen reemplaza la propiedad de veracidad de la afirmación por otra, la cual denominaremos provisionalmente «veracidad» y la cual posee las cualidades formales imprescindibles. Precisamente, todos los axiomas de R resultan «ciertos» en $\bar{R}$, todas las deducciones de las afirmaciones «ciertas» según las reglas de la lógica conducen nuevamente a las afirmaciones «ciertas», y HC resulta no «cierta» y, por tanto, no deductiva de los axiomas.

Mostraremos más detalladamente, como se lo hace.

1.9. Sea I un conjunto de potencia $> \omega_1$. Pongamos $\Omega = [0, 1]^I$ con medida de Lebesgue; $\bar{R}$ = conjunto de números aleatorios sobre

$\bar{\Omega}$ = conjunto de funciones reales medibles sobre Ω.

1.10. Teorema. a) *Para $\bar{R}$ son «ciertos» todos los axiomas de números reales y todas las conclusiones de los mismos.*

b) *La afirmación* de HC *no es* «cierta» *para* $\bar{R}$.

Propiedad: la afirmación P acerca de los números aleatorios $\bar{x}$, $\bar{y}$, . . . $\in \bar{R}$ «cierta» debe entenderse así:

si examinamos el punto $\omega = \Omega$, tomamos del mismo los valores $\bar{x}(\omega)$, $\bar{y}(\omega)$, . . . de los números aleatorios $\bar{x}$, $\bar{y}$ y formamos la afirmación P_{ω} acerca de estos números reales ordinarios, entonces para casi todos los $\omega \in \Omega$ (salvo el conjunto de medida 0) P_{ω} resultará cierta en el sentido corriente de la palabra.

Más breve: la «veracidad» es una veracidad a todas las pruebas con una probabilidad de unidad.

EJEMPLO. Supongamos que P es una afirmación «en R no existen divisores del cero», o sea, «si x, $y \in R$ son tales que $xy = 0$, entonces ora $x = 0$, ora $y = 0$. Entonces la afirmación «en $\bar{R}$ no existen divisores del cero», naturalmente, no es cierta. No obstante, la misma es «cierta», puesto que es cierta la afirmación: «si $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{R}$ son tales que $\overline{xy} = 0$, entonces para casi todos los $\omega \in \Omega$ ora $\bar{x}(\omega) = 0$, ora $\bar{y}(\omega) = 0$».

1.11. Para conferir a la definición de la «veracidad» un sentido exacto y aprender verificar con eficacia la «veracidad» de afirmaciones bastante complicadas, es necesario introducir prácticamente un lenguaje formal (en este caso, el lenguaje de la teoría de los números reales). Eso es un objeto matemático, y el teorema 1.10 en su formulación exacta será la afirmación acerca de este objeto y no de R ni de $\bar{R}$.

El enlace de este lenguaje con R se realiza a través del sistema de recetas no formales que permiten traducir al mismo los textos corrientes no formales acerca de R, y a través del sistema de teoremas los cuales sirven de argumentos a favor de la posibilidad de adecuación de tal traducción.

El papel de $\bar{R}$ se reducirá a la construcción auxiliar la cual se utilizará para determinar y calcular la función especial de la «veracidad» en las fórmulas del lenguaje.

Tal es el lugar de la lógica en el programa expuesto.

1.12. La demostración detallada del teorema 1.9 sería bastante larga y no trivial por varias causas. Ante todo, la descripción del lenguaje formal y de los axiomas de R en ella por si mismo no puede ser demasiado corta. Luego se requiere verificar la «veracidad» de todos los axiomas y la no «veracidad» de HC, en total unados docenas de verificaciones cada una de las cuales es un cálculo inductivo con sumas infinitas y productos dentro del álgebra booleana de los conjuntos medibles en Ω. Las dificultades más serias, no obstante, están relacionadas con lo que el sentido de todas las afirmaciones acerca de R en $\bar{R}$ cambia fuertemente, y no siempre hacia el lado cómodo.

Ilustraremos el lado cualitativo de la cosa tratando explicar, por qué HC no es «cierta» y por qué esto no es trivial.

Como ya se ha dicho, queremos construir el subconjunto $\bar{M}$ en $\bar{R}$ de potencia intermedia entre la potencia de N y la de $\bar{R}$. Para eso se puede proceder así: supongamos que para cualquier $i \in I$ el número aleatorio $\bar{x}_i$: $[0, 1]^I \to [0, 1]$ es la i-ésima proyección. Elijamos el subconjunto

$J \subset I$ tal que $\omega_0 < \text{card } J < \text{card } I$ (eso es posible, si I es grande) y pongamos

$$\overline{M} = \{x_j \mid j \in J\} \subset \overline{R}.$$

Entonces en el sentido habitual de la palabra card $\overline{N} <$ card $\overline{M} <$ card $\overline{R}$. No obstante, tenemos que demostrar que las afirmaciones respectivas son «ciertas» en nuestro sentido de Pickwick. Pero en dicho sentido el papel de los números enteros lo desempeñan los números aleatorios «localmente enteros» (enteros con probabilidad de 1 para todas las pruebas), cuya potencia puede ser mucho mayor que ω_0. Por eso la estimación inferior necesaria card $\overline{M}$ resulta bruscamente elevada. Análogamente la descripción de $\overline{M}$ dada por nosotros en términos ingenuos, después de su formalización y descifrado ulterior para $\overline{R}$, comienza a adquirir otro sentido y conduce al conjunto mucho mayor que el «verdadero» $\overline{M}$, por eso no está claro que se conserve la desigualdad superior para card $\overline{\overline{M}}$. Lo que todo, al fin y al cabo, resulta en orden parece ser un milagro.

El plan de la parte restante del capítulo es tal como viene a continuación. En los párrafos 2 y 3 exponemos (con reducciones) esta variante recortada del teorema acerca de la no deductividad de HC en el lenguaje de los números reales de segundo orden. El lector al cual le interesa la demostración completa puede comenzar directamente por el § 4, donde se introduce un «universo de conjuntos aleatorios» booleano que sustituye el V. En los párrafos 5—7 se verifica la «veracidad» de los axiomas de Zermelo—Fraenkel y en el § 8, la «falsedad» de HC.

2. Lenguaje del análisis real

2.1. En este párrafo describiremos el lenguaje formal orientado hacia la teoría de los números reales. Eso quiere decir, en particular, que las variables x, y, z, . . . se considerarán como nombres de números reales. No obstante, al tratar de escribir en el lenguaje de primer orden las afirmaciones que nos interesan, por ejemplo, la hipótesis del continuo HC o siquiera el axioma de completitud (que distingue el conjunto de todos los números reales respecto de los racionales), nos daremos cuenta que somos incapaces de hacerlo. En efecto, en estas formulaciones se trata de los subconjuntos arbitrarios (o relaciones de un lugar) de los números reales mientras que en el lenguaje de primer orden no hay símbolos para las relaciones variables: compárese el p. 3.17 del cap. I.

Por eso tendremos que examinar el lenguaje de segundo orden L_2 Real, el más económico, en el cual se expresan los axiomas y HC. Al describir el lenguaje seremos breves, notando en lo fundamental la específica relacionada con la orientación y las peculiaridades del segundo orden.

2.2. Lenguaje L_2 Real. El alfabeto consta de los símbolos de las variables x, y, z, . . ., variables del rango 1: f, g, h, . . ., constantes $\overline{0}$, $\overline{1}$, operaciones $+$, $\cdot$ del rango 2; relaciones $=$, $\leqslant$ del rango 2; conectivas, cuantificadores, paréntesis, comas, los cuales son los mismos que en los lenguajes $\mathcal{L}_1$.

Son *términos* x, y, z, . . . y $\overline{0}$, $\overline{1}$, así como $f(t)$, $t_1 \cdot t_2$ y $t_1 + t_2$, si f es el símbolo de la función; t, t_1 y t_2 son términos. Los términos son nombres de los números reales.

Las formulas elementales: $t_1 = t_2$ y $t_1 \leqslant t_2$, donde t_i son términos.

Fórmulas se determinan inductivamente, al igual que en los lenguajes de $\mathscr{L}_1$, con el siguiente complemento: $\forall f\,(Q)$ y $\exists f\,(Q)$ son fórmulas si Q es una fórmula y f, un símbolo de la función variable.

Los conceptos de la entrada libre de la variable (x o f) de una fórmula cerrada y otros se transponen obviamente a nuestro lenguaje. Los procedimientos de la escritura abreviada son los mismos que han sido demostrados en el cap. I. La interpretación estándar de las fórmulas del lenguaje que se sobreentiende debe ser evidente a partir de las definiciones y ejemplos de las fórmulas que vienen a continuación.

2.3. *Fórmula* $Z\,(y)$: *«y es un número entero».* El modo de escribirlo, probablemente, no es del todo obivo: escribimos «y se puede obtener agregando (o restando) 1 a 0» o «cualquier función f con período de 1 la cual se anula en cero, se anula en y», lo que brinda

$$Z\,(y)\colon \forall f\,((f\,(0) = 0 \wedge \forall x\,(f\,(x) = f\,(x + 1))) \rightarrow$$
$$\rightarrow f\,(y) = 0).$$

2.4. *Fórmula de HC* «cualquier *subconjunto en R ora es equipotente a R, ora numerable, ora finito*».

La formulación verbal preparada: «para cualquier conjunto de ceros de cualquier función h ora existe una función g que lo aplica sobre todos los R, ora existe una función f que aplica números enteros sobre él».

Fórmula:

$$\mathrm{HC}\colon \forall h\,(\exists g \forall y \exists x\,(h\,(x) = 0 \wedge y =$$
$$= g\,(x)) \vee \exists f \forall y\,(h\,(y) = 0 \rightarrow \exists x\,(Z\,(x) \wedge y =$$
$$= f\,(x)))).$$

Fíjense, $Z\,(x)$ entra en HC eomo parte integrante.

Escribamos aún el axioma de completitud:

2.5. *Fórmula C*: «cualquier subconjunto acotado superiormente en R (conjunto de los valores de la función f) tiene una cota superior (z):

$$\forall f\, (\exists y\, \forall x\, (f(x) \leqslant y \rightarrow \exists z\, \forall y\, (\forall x\, (f(x) \leqslant y) \leftrightarrow \leftrightarrow z \leqslant y)).$$

Todas las demás fórmulas que nos interesan se escriben aún más sencillamente y no requieren comentarios especiales.

Ahora definamos exactamente la propiedad de la «veracidad» de una fórmula cerrada del lenguaje L_2 Real descrito informalmente en el § 1. Subrayamos que esta definición no es absoluta sino que depende de la elección del espacio probabilístico fundamental Ω, el cual se utiliza para construir el «modelo» de los números reales.

2.6. Algebra de los valores de veracidad. Al igual que en el § 1, pongamos:

I es cierto conjunto;

$\Omega = [0, 1]^I$, con medida de Lebesgue;

B, álgebra de conjuntos medibles Ω según el módulo de los subconjuntos de la medida de 0;

0, clase del conjunto vacío en B;

1, clase de Ω en B.

En el álgebra B van definidas las operaciones siguientes:

a' es un «complemento» para el elemento $a \in B$;

$a \wedge b$, «intersección» de los elementos $a, b \in B$;

$a \vee b$, «unión» de los elementos $a, b \in B$, las cuales satisfacen las identidades corrientes y definen en B la estructura del álgebra booleana. Escribimos $a \leqslant b$, si $a \wedge b = a$.

Es más, las operaciones de intersección y de producto se definen complementariamente de modo unívoco en *familias infinitas* de elementos y continuan satisfaciendo las identidades corrien-

tes que se cumplen en el álgebra de todos los subconjuntos de cualquier conjunto. No lo verificaremos.

Notemos sólo que aquí es esencial la identificación de los conjuntos «según el módulo de cero» y que las identidades del tipo $A \bmod 0 \wedge B \bmod 0 = (A \cap B) \bmod 0$ ya no se transponen sobre el caso de familias infinitas.

Por último, B satisface la *condición de numerabilidad:* si $\bigvee a_\alpha = 1$ y $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$, entonces $a_\alpha = 0$ pero no más que para el conjunto numerable de índices α. Eso se deduce de la positividad y aditividad de la medida de Lebesgue.

Hablando técnicamente, B es un *álgebra booleana completa con condición de numerabilidad.* Su origen exacto y la presencia sobre ella de la medida desempeñan un papel menos importante.

2.7. Conjunto de interpretación. Ahora introduciremos el conjunto grande $\overline{M}$, cada punto del cual ξ consistirá en atribuir ciertos valores a todos los símbolos del alfabeto del lenguaje L_2Real. Después de fijar ξ cada fórmula del lenguaje resultará un enunciado concreto acerca de las funciones medibles (magnitudes aleatorias) de Ω y las funcionales sobre éstas (compárese el § 2 del cap. II).

Pongamos para eso:

$\overline{R}$, es un conjunto de las funciones medibles reales de Ω;

$\overline{R}^{(1)}$, conjunto de distinta clase de aplicaciones $\overline{R} \xrightarrow{\overline{f}} \overline{R}$ que satisface la condición

$$\forall x,\ y \in \overline{R} \text{ conjunto } \{w \in \Omega \mid \overline{x}(w) = \overline{y}(w)\} \times$$
$$\times \bmod 0 \leqslant \{w \in \Omega \mid \overline{f}(\overline{x})(w) =$$
$$= \overline{f}(\overline{y})(w)\} \bmod 0.$$

El sentido intuitivo de la definición $\bar{R}^{(1)}$ es el siguiente. Si excluimos de ella la condición «mod 0», entonces la exigencia significará sólo que el valor de la magnitud aleatoria $\bar{f}(\bar{x})$ en cada verificación deberá definirse por el valor de $\bar{x}$ durante esta prueba. Desde luego, ésta es una exigencia muy natural si queremos que $\bar{f}$ transformen de modo adecuado las propiedades de las funciones reales ordinarias en el sentido del § 1. La adición de «mod 0» debilita esta condición hasta el requerimiento «con probabilidad condicional de 1».

Ahora volveremos al conjunto $\bar{M}$: un punto $\xi \in \bar{M}$ está en la elección

$x^\xi \in \bar{R}$ para cada símbolo de la variable x;

$f^\xi \in \bar{R}^{(1)}$ para cada símbolo de la función variable f.

Describamos la interpretación de las expresiones del lenguaje que responde a la elección de ξ.

a) *Términos.* Sea t un término, $\xi \in \bar{M}$. Entonces $t^\xi \in \bar{R}$ es una magnitud aleatoria que se determina por el obvio proceso inductivo.

b) *Función de veracidad* $\| \quad \|$ *en las fórmulas elementales.* Sea P una fórmula elemental $t_1 \leqslant t_2$ o $t_1 = t_2$. Se denomina su valor de veracidad en el punto $\xi \in \bar{M}$ el elemento del álgebra B, el cual se define así:

$$\| t_1 \leqslant t_2 \| (\xi) = \{w \in \Omega \mid t_1^\xi (w)\} \text{ mod } 0.$$

Una definición análoga concierne a $t_1 = t_2$.

c) *Función de veracidad* $\| \quad \|$ *en el caso general.* La definición general es inductiva. Para la unión mediante las conectivas se utilizan las

mismas fórmulas que en el p. 5.7 del cap. II:
$\| \neg P \| = \| P \|'$, $\| P \vee Q \| = \| P \| \vee \| Q \|$,
$\| P \wedge Q \| = \| P \| \wedge \| Q \|$,
$\| P \to Q \| = \| P \|' \vee \| Q \|$, $\| P \leftrightarrow Q \| =$
$= (\| P \| \wedge \| Q \|) \vee (\| P \|' \wedge \| Q \|')$.
En estas cinco fórmulas, para abreviar, hemos omitido la indicación de ξ. Por último,
$\| \forall x P \| (\xi) = \bigwedge_{\xi'} \| P \| (\xi')$ (por todos los ξ' que difieren de ξ sólo por la variación de x);
$\| \exists x P \| (\xi) = \bigwedge_{\xi'} \| P \| (\xi')$ (por los mismos ξ')
y análogamente con los cuantificadores por las funciones variables.

Intuitivamente el valor de la función de veracidad de la afirmación acerca de los números aleatorios representa en sí un conjunto de pruebas mod 0 a las cuales dicha afirmación se hace cierta como hecho acerca de los números reales.

2.8. Lema. *Si P es una fórmula cerrada, entonces $\| P \| (\xi)$ no depende de la elección de $\xi \in \overline{M}$ y adquiere solamente los valores de* 0 *ó* 1.

(Se establece por un razonamiento inductivo no complicado a lo largo de la descripción de P. Más cómodo es demostrar el hecho general: si P es cualquier fórmula, y ξ y ξ' no se diferencian en las variables que entran libremente en P, entonces $\| P \| (\xi) = \| P \| (\xi')$: compárese la proposición 2.10 del cap. II).

Este valor general $\| P \| (\xi)$ lo podemos denotar simplemente por $\| P \|$. Ahora estamos capaces de formular la definición fundamental de este párrafo.

2.9. Definición. *Se llama «cierta» la fórmula P del lenguaje* L_2Real, *si $\| P \| (\xi) = 1$ para todos los $\xi \in \overline{M}$.*

3. La no deductividad de la hipótesis del continuo en L_2 Real

3.1. Lema fundamental.

a) *Las reglas de inferencia conservan su «veracidad»*;

b) *los axiomas lógicos de primer orden y sus variantes* en L_2Real *son «ciertos»*;

c) *los axiomas especiales del lenguaje* L_2Real *son «ciertos»*;

d) *HC no es «cierta», si* card $I > \omega_1$.

De aquí se deduce

3.2. Teorema. *HC no se deduce de los axiomas del lenguaje* L_2Real.

En este párrafo aduciremos los fragmentos de la demostración del lema principal, los cuales son esenciales también para el teorema «verdadero» de Cohen y no sólo para nuestro problema modelo. Notemos que el teorema 3.2 es más débil que el de Cohen, ya que el lenguaje L_2Real tiene mucho menos medios expresivos que el de la teoría de los conjuntos. Aunque en él se formula la hipótesis del continuo, en virtud de los resultados generales de Gödel no hay ningunos motivos de esperar que su demostración imaginaria también está obligada a tolerar la formalización en este lenguaje. Por ejemplo, para la deducción podría ser necesaria la introducción de funcionales de las funciones, funcionales de las funcionales, etc. El lenguaje de la teoría de los conjuntos, al cual volveremos en el § 4, tiene medios para examinar simultáneamente todos estos niveles finitos y hasta transfinitos.

3.3. DEMOSTRACION 3.1a. Si $\| P \| = 1$ y $\| P \to Q \| = 1$, entonces $\| P \|' = 0$ y $\| P \|' \vee \vee \| Q \| = 1$, de donde $\| Q \| = 1$.

Si $\| P \| = 1$, entonces $\| P \| (\xi) = 1$ para todos los $\xi \in \overrightarrow{M}$, pero entonces ($\xi'$ recorre todas

las variaciones de ξ por x):

$$\| \forall xP \| (\xi) = \bigwedge_{\xi'} \| P \| (\xi') = \bigwedge_{\xi'} 1 = 1.$$

De forma análoga se analiza Gen por las funciones.

3.4. DEMOSTRACIÓN 3.1b. (esbozo).

Tautologías. Su «veracidad» queda demostrada en el § 5 del cap. II.

Axiomas con cuantificadores. La demostración se obtiene por inducción a lo largo de la descripción de las fórmulas que entran en los esquemas de los axiomas y es bien rectilínea, por eso la omitimos.

3.5. DEMOSTRACIÓN 3.1c (esbozo). Nos limitaremos a indicar la lista de axiomas y dar breves comentarios.

Axiomas especiales de la teoría de los conjuntos: son axiomas de igualdad y (esquema de los) axiomas de elección:

$$AB: \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists f \forall x P(x, f(x)),$$

donde P es cualquier fórmula que no tiene variables libres, salvo x e y, e y no acota f en P.

Axiomas especiales de la teoría de los campos: son axiomas de los grupos aditivo, multiplicativo y de distributividad de la adición con respecto a la multiplicación.

Axiomas especiales del orden:

$$x \leqslant y \vee y \leqslant x; \ (x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \leftrightarrow x = y;$$
$$x \leqslant y \rightarrow (x + z \leqslant y + z); \quad (x \leqslant y \wedge \bar{0} \leqslant z) \rightarrow$$
$$\rightarrow xz \leqslant yz.$$

Axioma de completitud (p. 2.5).

Esfuerzos máximos los requiere la verificación de la «veracidad» de los axiomas de elección y de completitud. El carácter de cálculos en este caso,

sin embargo, es análogo a los de la demostración de «falsedad» de la HC, los cuales realizaremos a continuación. Por eso omitimos aquí estas verificaciones.

El primer axioma de igualdad es trivial. El segundo se verifica primeramente para las fórmulas elementales P y luego se realiza una inducción por la longitud de la descripción de P. Los razonamientos son bastante minuciosos pero sencillos.

Los axiomas del campo ordenado se verifican sin dificultad. Limitémonos a un ejemplo: «el número no nulo tiene un inverso»:

$$\| \forall x (\neg (x = \overline{0}) \to \exists y (xy = \overline{1})) \| =$$
$$= \bigwedge_{x \in \overline{R}} (\| \overline{x} = 0 \| \vee \bigvee_{\overline{y} \in \overline{R}} \| \overline{x}\overline{y} = 1 \|).$$

Para verificar que este valor es igual a 1 basta establecerlo para cada término con valor fijo de $\overline{x} \in \overline{R}$ para lo cual, por su parte, basta construir por $\overline{x}$ una magnitud aleatoria $\overline{y} \in \overline{R}$ tal que $\| \overline{x} = 0 \| \vee \| \overline{xy} = 1 \| = 1$. Para eso pongamos

$$\overline{y}(w) = \begin{cases} \overline{x}(w)^{-1}, & \text{si } \overline{x}(w) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \overline{x}(w) = 0. \end{cases}$$

3.6. DEMOSTRACIÓN 3.1d. Recordemos primero que forma tiene HC:

$$\forall h (\exists g \forall y \exists x (h(x) = 0 \wedge y = g(x)) \vee$$
$$\vee \exists f \forall y (h(y) = 0 \to \exists x (Z(x) \wedge y = f(x)))).$$

Denotemos por P_1, P_2 la primera y segunda alternativas en esta fórmula: HC tiene forma de $\forall h (P_1 \vee P_2)$. Queremos demostrar que para cualquier punto $\xi \in \overline{M}$ tenemos

$$\| \forall h (P_1 \vee P_2) \| (\xi) = 0.$$

De acuerdo con la definición en el p. 2.7

$$\| \forall h\, (P_1 \vee P_2) \| (\xi) = \bigwedge_{\xi'} (\| P_1 \| (\xi') \vee P_2 (\xi') \|),$$

donde ξ' recorre todas las variaciones de ξ por h. Para verificar que el valor es igual a 0 basta establecer la existencia del punto ξ' tal que $\| P_2 \|(\xi') = \| P_2 \|(\xi') = 0$. Por cuanto en P_1 y P_2 todas las variables, excepto h, son enlazadas, la determinación de ξ' equivale a la elección de $h^{\xi'} = \overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$. Señalaremos $\overline{h}$ explícitamente: será la función, cuyo «conjunto de ceros tiene una potencia intermedia».

Para este fin, al igual que en el § 1, fijamos el subconjunto $J \subset I$ de potencia estrictamente intermedia entre ω_0 y card I. Recordemos que $\overline{x}_i \in \overline{R}$ para cada $i \in I$ es la función «i-ésima coordenada».

Luego, para cada magnitud $\overline{x} \in \overline{R}$ aleatoria eligiremos un conjunto $\Omega(\overline{x}) \leqslant \Omega$ tal que

$$\bigvee_{j \in J} \| \overline{x} = \overline{x}_j \| = \Omega(\overline{x}) \bmod 0$$

(aquí se utiliza la completitud de B). Por último, definamos $\overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$ poniendo para cada $\overline{x} \in \overline{R}$ y $w \in \Omega$:

$$\overline{h}(\overline{x})(w) = \begin{cases} 0, \text{ si } w \in \Omega(\overline{x}), \\ 1 \text{ en los demás casos} \end{cases}$$

3.7. Afirmación acerca de la corrección.

a) $\overline{h}(\overline{x})$ *como función de* w *(siendo fijo* $\overline{x}$*) es medible, así que* $\overline{h}$ *aplica* $\overline{R}$ *en* $\overline{R}$.

b) *Para cada* $\overline{x} \in \overline{R}$ *tenemos*

$$\| \overline{h}(\overline{x}) = 0 \| = \bigvee_{j \in J} \| \overline{x} = \overline{x}_j \|.$$

c) $\overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$ (véase el p. 4.2), *ya que existe un punto* $\xi' \in \overline{M}$ *para el cual* $h^{\xi'} = \overline{h}$:

DEMOSTRACIÓN a) $\bar{h}(\bar{x})$ adquiere sobre Ω sólo dos valores: 0 y 1, y los conjuntos del nivel de estos valores son medibles según la definición y la propiedad de la completitud de B.

b) Es evidente de la definición.

c) Hemos de verificar que para todos los $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{R}$ tenemos

$$\{w \in \Omega \mid \bar{x}(w) = \bar{y}(w)\} \bmod 0 \leqslant \mid w \in \Omega \mid \bar{h}(\bar{x})(w) = \\ = \bar{h}(\bar{y})(w)\} \bmod 0.$$

Demostremos que el conjunto de puntos $w \in \in \Omega$, para los cuales simultáneamente $\bar{x}(w) = = \bar{y}(w)$ y $\bar{h}(\bar{x})(\bar{w}) \neq \bar{h}(\bar{y})(w)$, tiene una medida 0.

Basta examinar el caso $\bar{h}(\bar{x})(w) = 0$, $\bar{h}(\bar{y})(w) = 1$, ó sea, establecer que

$$\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| \wedge \| \bar{h}(\bar{y}) = 1 \| = 0.$$

Escribamos el segundo factor en forma de $\bigvee_{j \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_j \|$ (véase la afirmación 3.7b) y apliquemos a éste y al primer factor la regla de la distributividad (se aprovecha la completitud de B). Además, tomemos en consideración que $\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{x} = \bar{x}_j \| \leqslant \bar{y} = \bar{x}_j \|$. Entonces obtendremos

$$\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| \leqslant \| \bigvee_{j \in J} \| \bar{y} = \bar{x}_j \| = \| \bar{h}(\bar{y}) = 0 \|,$$

de donde sigue lo requerido.

EXPLICACION La elección de $\bar{h}$ es un lugar esencial de la demostración y lo queremos motivar. Recordemos que h es el nombre de la función cuya potencia del conjunto de ceros nos interesa. La elección de la $\bar{h}$ concreta para «refutar» HC se realiza de modo que entre «casi siempre ceros»

de $\bar{h}$ haya elementos del conjunto $\{\bar{x}_j \mid j \in J\}$, el cual tiene una potencia intermedia en el sentido ingenuo de la palabra (compárese el § 1). No obstante, $\bar{h}$ no puede ser una aplicación cualquiera de $\bar{R}$ en $\bar{R}$: se la ha superpuesto la fuerte acotación $\bar{h} \in \overline{R^{(1)}}$. Por eso juntamente con todas las $\bar{x}_j$ en el conjunto de ceros $\bar{h}$ casi siempre pueda resultar inevitable incluir aún más cualesquier $\bar{y} \in \bar{R}$, así como «incluir parcialmente» cualesquier $z \in \bar{R}$. La última expresión es una intención de transmitir la posibilidad de que $\| \bar{h}(z) = 0 \|$ no sea 0 ni 1, así que $\bar{z}$ es el cero de $\bar{h}$ con «cierta probabilidad».

De este modo, el «conjunto de ceros» $\bar{h}$ puede resultar mayor que lo queremos, así que es cosa natural esperar dificultades en la demostración de lo que no se lo puede aplicar sobre todos los $\bar{R}$ (alternativa P_1). Parecía que la circunstancia haga trivial la refutación de la alternativa P_2 (no se puede aplicar Z sobre el conjunto de ceros), sin embargo ¡y eso no es justo! Como ya notamos, resultará que $\| Z(\bar{x}) \| = 1$ para muchas $\bar{x}$ que no son funciones de valores enteros continuas sobre Ω, además, $\| Z(\bar{x}) \| = 0$, 1 aún para $\bar{x}$ cualesquiera, así que el «conjunto de números enteros» en nuestro modelo creció bruscamente.

Ultima observación: en nuestra discusión en realidad se originó el concepto del «conjunto B-aleatorio», el cual será el central en la exposición ulterior (véase el § 4). Precisamente, el «conjunto de ceros $\bar{h}$» es aleatorio en el sentido de que para cada $\bar{z} \in \bar{R}$ a la afirmación «$\bar{z} \in$ $\in$ (ceros $\bar{h}$)» se le atribuye naturalmente el valor booleano de veracidad $\| \bar{h}(\bar{z}) = 0 \|$.

Volvamos ahora a la demostración interrumpida de que $\| \Pi C \| = 0$.

3.8. DEMOSTRACIÓN. $\| P_1 \| (\xi') = 0$. De acuerdo con las reglas de cálculo de la función de veracidad hallamos

$$\| P_1 \| (\xi') = \bigvee_{\bar{g}} \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{\bar{x}} \{ \| \bar{h} (\bar{x}) = 0 \| \wedge \| \bar{y} = \bar{g} (\bar{x}) \| \}$$

($\bar{h}$ está definida arriba. $\bar{g}$ recorre todos los elementos de $\bar{R}^{(1)}$ y $\bar{x}$, $\bar{y}$ son todos los elementos de $\bar{R}$). Supondremos que $\| P_1 \| (\xi') = 0$ y llegaremos a la contradicción. Denotemos ese valor por $\bigvee_{\bar{g}} a (\bar{g})$.

Si el mismo $\neq 0$, entonces $a (\bar{g}) \neq 0$ para alguna función concreta $\bar{g} \in \bar{R}^{(1)}$. Elijámosla y pongamos

$$a = \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{\bar{x}} (\bigvee_{j \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_j \| \wedge \| \bar{y} = \bar{g} (\bar{x}) \|.$$

Aquí $\bigvee_j$ apariciò como una sustitución de $\| \bar{h} (\bar{x}) = 0 \|$ en virtud de 3.7b. Luego $\| \bar{x} = \bar{x}_j \| \wedge \| \bar{y} = \bar{g} (\bar{x}) \| \leqslant \| \bar{y} = \bar{g} (\bar{x}_j) \|$. Haciendo uso de esto y de la distributividad, hallamos

$$a \leqslant \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{j \in J} \| \bar{y} = \bar{g} (\bar{x}_j) \|.$$

En particular, para cada $\bar{x}_i$ en lugar de $\bar{y}$

$$a \leqslant \bigvee_{j \in J} \| \bar{x}_i = \bar{g} (\bar{x}_j) \|.$$

Si, como lo hemos supuesto, $a \neq 0$, entonces para cada i se hallará $j (i) \in J$ tal que

$$\| \bar{x}_j = \bar{g} (\bar{x}_{j(i)}) \| \neq 0.$$

Por cuanto I es innumerable y card $J <$ $<$ card I, ha de existir un índice $j_0 \in J$ tal que $j_0 = j(i)$ para todos los i del subconjunto innumerable $I_0 \in J$. No obstante, eso contradice la condición de numerabilidad para B, porque los términos de la familia $\| \bar{x}_i = \bar{g}(\bar{x}_{j_0}) \| \ (i \in I_0)$ no se intersecan dos a dos. En efecto,

$$\| \bar{x}_{i_1} = \bar{g}(\bar{x}_{j_0}) \| \wedge \| \bar{x}_{i_2} = \bar{g}(\bar{x}_{j_0}) \| \leqslant \| \bar{x}_{i_1} = \bar{x}_{i_2} \| = 0,$$

si $i_1 \neq i_2$.

Préstese la atención cuan paralelo es ese razonamiento al «ingenuo» del § 1. La función $\bar{g}$, según se supone, aplica los ceros $\bar{h}$ sobre $\bar{R}$ «con probabilidad no nula», pero es poco probable que se pueda formular verbalmente el sentido exacto de los cálculos.

Cálculo de $\| Z(y) \|$. La fórmula $Z(y)$, «y es un número entero», viene escrita en el p. 2.3. Como la misma entra en P_2, el cálculo de $\| Z(y) \|$ es necesario para calcular $\| P_2 \|$.

3.9. Lema. *Sea* $\eta \in \overline{M}$, $y^\eta = \bar{y} \in \bar{R}$. Entonces $\| Z(y) \| (\eta) = \bigvee_{n \in Z} \| \bar{y} = n \| = \{ w \in \Omega \mid \bar{y}(w) \in$ $\in Z\} \bmod 0$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que establecer que

$$\bigvee_{\bar{f}} (\| \bar{f}(0) = 0 \|') \vee (\bigvee_{\bar{x}} \| \bar{f}(\bar{x}) =$$

$$= \bar{f}(\bar{x} + 1) \|' \vee \| \bar{f}(\bar{y}) = 0 \| = \bigvee_{n \in Z} \| \bar{y} = n \|.$$

Verifiquemos por turno la desigualdad por ambos lados.

DESIGUALDAD $\leqslant$. Basta hallar la función concreta $\bar{f} \in \bar{R}^{(1)}$, para la cual el correspondiente término del primer miembro se contenga en el segundo.

Definamos $\bar{f}$ poniendo $\bar{f}(\bar{x})(w) = \operatorname{sen}^2 \pi \bar{x}(w)$ (en vez de $\operatorname{sen}^2 \pi z$ se puede tomar cualquier fun-

ción $R \to R$ medible con período de 1 y ceros sólo en los puntos enteros). Es fácil ver que $\overline{f}(\overline{x}) \in \overline{R}$ y $\overline{f} \in R^{(1)}$. Entonces $\| \overline{f}(0) = 0 \|' = 0$ y $\| \overline{f}(\overline{x}) = f(\overline{x} + 1) \|' = 0$. Por eso es necesario sólo verificar que

$$\| \operatorname{sen}^2 \pi\overline{y} = 0 \| \leqslant \bigvee_{n \in Z} \| \overline{y} = n \|,$$

y eso es evidente.

DESIGUALDAD $\geqslant$. Basta verificar que para cualesquier valores fijos $n \in Z$, $\overline{f} \in \overline{R}^{(1)}$, $\bar{y} \in \overline{R}$ tenemos

$$\| \bar{y} = n \| \leqslant b \vee c,$$

donde

$$b = \| \overline{f}(0) = 0 \|' \vee (\bigvee_{\overline{x}} \| \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x} + 1) \|');$$

$$c = \| \overline{f}(\overline{y}) = 0 \|.$$

Pero la desigualdad $a \leqslant b \vee c$ equivale a que $a \wedge c' \leqslant b$. Luego, en nuestra situación

$$a \wedge c' = \| \bar{y} = n \| \wedge \| \overline{f}(\bar{y}) = 0 \|' \leqslant \| \overline{f}(n) = \\ = 0 \|'$$

(n bajo el signo de $\overline{f}$ es una magnitud aleatoria constante siempre igual a n). Por eso basta cerciorarse de que

$$\| \overline{f}(n) = 0 \|' \leqslant \| \overline{f}(0) = 0 \|' \vee \\ \vee (\bigvee_{\overline{x}} \| \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x} + 1) \|')$$

o pasando a los complementos, de que

$$\| \overline{f}(n) = 0 \| \geqslant \| \overline{f}(0) = 0 \| \wedge \\ \wedge (\bigwedge_{\overline{x}} \| \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x} + 1) \|).$$

Aumentaremos sólo el miembro derecho si dejamos en él sólo los términos que responden a $\bar{x} = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pero la intersección de estos términos, probablemente, sea igual a

$\| f(0) = 0 \| \wedge \| f(0) = \bar{f}(1) = \ldots = \bar{f}(n) \| \leqslant$
$\leqslant \| \bar{f}(n) = 0 \|$.

3.10. DEMOSTRACIÓN de $\| P_2 \| (\xi') = 0$. Según las reglas del cálculo de $\| P_2 \|$, tomando en cuenta el lema anterior, hallamos

$$\| P_2 \| (\xi') = \bigvee_{\bar{f}} \bigwedge_{\bar{y}} (\| \bar{h}(\bar{y}) = 0 \|' \vee \bigvee_{\bar{x}} (\bigvee_{n} (\| \bar{x} =$$
$$= n \| \wedge \| \bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \|))).$$

Como $\bar{f} \in \bar{R}^{(1)}$, tenemos $\| \bar{x} = n \| \leqslant \| \bar{f}(\bar{x}) =$
$= \bar{f}(n) \|$, así que

$$\| \bar{x} = n \| \wedge \| y = \bar{f}(\bar{x}) \| \leqslant \| \bar{y} = \bar{f}(n) \|.$$

Luego, basta demostrar que el término que responde a cualquier elección concreta de $\bar{f}$ es igual a 0. Supongamos que eso no es así y llegaremos a la contradicción. Supongamos que $a \neq 0$ es un término que responde a $\bar{f}$. Según lo dicho

$$a \leqslant \bigwedge_{y} (\| \bar{h}(\bar{y}) = 0 \|' \vee \bigvee_{n} \| \bar{y} = \bar{f}(n) \|).$$

En particular, para cada $j \in J$ debemos tener (con $\bar{x}_j$ en lugar de $\bar{y}$):

$$a \leqslant \bigvee_{n} \| \bar{x}_j = \bar{f}(n) \|$$

(tomar en consideración que $\| \bar{h}(\bar{x}_j) = 0 \|' = 0$ en virtud de 5.7b). Quiere decir, que para cada j ha de hallarse un número entero $n(j)$ tal que $\| \bar{x}_j = \bar{f}(n(j)) \| \neq 0$. Como J es innumerable, existen n_0 y el subconjunto innumerable $J_0 \subsetneq J$

de tales j_0 que $n(j_0) = n_0$ para todos los $j_0 \in$ $\in J_0$. Entonces $\| \overline{x}_j = \overline{f}(n_0) \|$, $j \in J_0$ forman el conjunto innumerable de elementos de B no nulos que no se intersecan dos a dos. Eso contradice la condición de numerabilidad para B.

4. Universo sobre el álgebra booleana

4.1. En este párrafo fijamos cierta álgebra booleana completa B (véase el p. 2.6) y construiremos sobre ella el universo de «conjuntos B-aleatorios». El universo resultará el modelo para los axiomas de Zermelo—Fraenkel en el mismo sentido generalizado, en el cual los números aleatorios de $\overline{R}$ han servido de modelo a los números reales de R en el § 3. Verificaremos la «veracidad» de todos los axiomas de L_1Set en los §§ 5—7 y luego la «falsedad» de la hipótesis del continuo para la conveniente elección de B en el § 8.

Los objetos de V^B se denotarán por las mayúsculas X, Y, Z. Juntamente con cada dos objetos serán definidos los elementos $\| X \in Y \| \in B$ e $\| Y = X \| \in B$. Su sentido intuitivo es tal: si B es el álgebra de conjuntos medibles del espacio probabilístico, entonces $\| X \in Y \|$ es el conjunto máximo, sobre el cual «X es elemento de Y con la probabilidad de unidad». Como en el caso general las medidas probabilísticas no juegan ningún papel, llamaremos «probabilidades» simplemente los elementos de B y entonces $\| X \in Y \|$ es simplemente una probabilidad de inclusión X en Y.

La construcción de las definiciones no es trivial, puesto que queremos conservar la «veracidad» del axioma de extensión. Si un conjunto aleatorio ha de definirse unívocamente por sus elementos (también aleatorios), en el sentido ge-

neralizado al menos, entonces no puede ser «demasiado» aleatorio: véase el p. 4.3.

Vamos a considerar que el álgebra B como conjnuto es un elemento del universo V de von Neumann. En tal caso todos los objetos de V^B también serán elementos de V, y las construcciones que necesitamos podremos formalizar usando los medios de L_1Set. Eso en principio permite aceptar un punto de vista más formalístico que nuestro; entonces la demostración de la independencia de HC que se expone a continuación puede ser considerada como una guía para construir una variante mucho más sintáctica aprovechando la «interpretación interna» del lenguaje L_1Set en el mismo. La suposición acerca del carácter no contradictorio de los axiomas de Zermelo—Fraenkel en la formulación del teorema 1.6 adquiere en este caso un sentido de precaución razonable, ya que este carácter no contradictorio no puede ser establecido con los medios del propio lenguaje (Gödel). En nuestra exposición esta cláusula es pura hipocresía, ya que la «existencia» del universo V aceptada por nosotros el cual es un modelo para los axiomas, es la que «demuestra» su carácter no contradictorio: compárese el apéndice, p. 1.8.

4.2. Construcción de V^B. Construiremos para cada ordinal α un conjunto V^B_α mediante la recursión transfinita por α y luego pondremos $V^B = \bigcup_\alpha V^B_\alpha$. Origen de la recursión: $V^B_\alpha = \varnothing$.

Suposición inductiva:

Para el ordinal $\alpha \geqslant 1$ está definido el conjunto V^B_α;

para cada elemento de $X \in V^B_\alpha$ está definido el subconjunto $D(X) \subseteq V^B_\alpha$ (su sentido inductivo se explicará a continuación;

para cada par de elementos $X, Y \in V_\alpha^B$ están definidas las «funciones booleanas de veracidad» $\| X \in Y \| \in B$, $\| X = Y \| \in B$ las cuales intuitivamente se han de imaginar como una «probabilidad de que X sea un elemento de Y» y «probabilidad de que X coincida con Y», respectivamente.

Estos datos, según se supone, satisfacen las condiciones siguientes:

a) si $\beta_1 \leqslant \beta_2 < \alpha$, entonces $V_{\beta_1}^B \subseteq V_{\beta_2}^B$;

b) si $\beta < \alpha$, $X \in V_{\beta+1}^B \setminus V_\beta^B$, entonces $D(X) = V_\beta^B$;

$$c_1) \| X \in Y \| = \bigvee_{Z \in D(Y)} (\| X = Z \| \wedge \| Z \in Y \|). \qquad (1)_\alpha$$

La condición $(1)_\alpha$ es una reflexión de la exigencia de que resulte «cierta» la siguiente fórmula de la teoría de conjuntos que se deduce fácilmente de los axiomas:

$$x \in y \leftrightarrow \exists z\, (x = z \wedge z \in y).$$

$$c_2) \| X = Y \| = (\bigwedge_{Z \in D(X)} \| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \|) \wedge$$

$$\wedge (\bigwedge_{Z \in D(Y)} \| Z \in Y \|' \vee \| Z \in X \|). \qquad (2)_\alpha$$

La condición $(2)_\alpha$ es una reflexión de la «veracidad» que se deduce de la fórmula

$$x = y \leftrightarrow (z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x).$$

Notemos que en este nivel no es del todo claro por qué, digamos, en $(1)_\alpha$ nos hemos limitado sólo a los Z que están contenidos en $D(Y)$, pareciera ser cosa natural verificar en general todos los Z. Más tarde veremos que la fórmula queda justa si la unión booleana se tomará por todos los Z.

Con eso terminamos la descripción de los datos para V_α^B.

Ahora indicaremos una construcción recursiva explícita de V_α^B y los datos enlazados con él.

Definición de $V_{\alpha+1}^B$ y de D. Pongamos $V_{\alpha+1}^B = V_\alpha^B \cup V_{\alpha+1}^{B*}$, donde $V_{\alpha+1}^{B*}$ consta de distinta clase de funciones Z con el campo de definición de V_α^B y el de valores de $\subseteq B$, que satisfacen la «condición de extensionalidad» siguiente:

para todos los $X, Y \in V_\alpha^B$, $\| X = Y \| \wedge Z(X) = \| X = Y \| \wedge Z(Y)$. (3)

Un poco más a continuación definiremos $\| X \in Z \| = Z(X)$ para $X \in V_\alpha^B$, $Z \in V_{\alpha+1}^B \setminus V_\alpha^B$; por eso (3), como más arriba, puede ser interpretado como reflexión de la «veracidad» de la fórmula

$$(x = y) \wedge (x \in z) \leftrightarrow (x = y) \wedge (y \in z).$$

Compárense también los comentarios en el p. 2.7 acerca de la definición de $\overline{R}^{(1)}$.

Los elementos $V_{\alpha+1}^B \setminus V_\alpha^B$ los llamaremos *nuevos* (del rango α), y los V_α^B, *viejos*. Pongamos $D(Z) = V_\alpha^B$, si Z es nuevo.

Definición de las funciones booleanas de veracidad. En los pares de elementos viejos estas funciones ya están definidas. Pongamos a continuación:

$\| X \in Y \| = Y(X)$, si X es viejo e Y, nuevo; (4)

$$\| X = Y \| = \Big(\bigwedge_{Z \in D(X)} \| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \| \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{Z \in D(Y)} \| Z \in Y \|' \vee \| Z \in X \| \Big). \quad (5)$$

La fórmula (5) está cumplida automáticamente si ambos X e Y son viejos en virtud de $(2)_\alpha$; en los demás casos define de modo unívoco $\| X = Y \|$ tomando en cuenta (4) y lo que Z en (5) recorre sólo los elementos viejos.

Por último, pongamos

$$\| X \in Y \| = \bigvee_{Z \in D(Y)} \| X = Z \| \wedge \| Z \in Y \|, \qquad (6)$$

si X es un elemento nuevo e Y, cualquiera. El segundo miembro se define unívocamente con la ayuda de (4) y (5), puesto que $D(Y) \subseteq V_\alpha^B$.

Las fórmulas (4) y (6) muestran para los X nuevos e Y viejos lo siguiente. Como primera aproximación podemos considerar que el conjunto aleatorio Y del rango α «consta» de los conjuntos Z de rango menor que entran en Y con las probabilidades $Y(Z)$, las cuales pueden ser elegidas con un grado de arbitrariedad considerablemente menor subordinándose solamente a la condición de extensionalidad (3).

Pero luego resulta que debemos «incluir» automáticamente en Y nuevos y nuevos elementos X con probabilidades que ya se prescriben por la fórmula (6). Las condiciones (3) y (6) significan que nuestros conjuntos no pueden ser del todo aleatorios.

Definición de V_α^B y de otros datos para los ordinales límite α. Ponemos simplemente $V_\alpha^B = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^B$, y todos los demás datos ya están construidos.

4.3. Verificación de la corrección de las definiciones. Tenemos que verificar $(1)_{\alpha+1}$ y $(2)_{\alpha+1}$: las propiedades de 4.2a y b, al pasar de α a $\alpha + 1$, por lo visto, se conservan. Por su parte, la identidad única y no del todo obvia se obtiene, si en $(1)_{\alpha+1}$ se toma X por viejo e Y por nuevo:

$$Y(X) = \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} (\| X = Z \| \wedge Y(Z)).$$

Se verifica así. La desigualdad $\geqslant$ se obtiene si apuntamos el segundo miembro en forma de $V_Z (\| X = Z \| \wedge Y (X))$ con ayuda de (3). La desigualdad $\leqslant$ se obtiene si consideramos el término con $Z = X$ y si tomamos en cuenta que $\| X = X \| = 1$ para todos los X (inducción ligera por α).

En eso queda terminada la construcción del universo booleano.

4.4. Ejemplos y observaciones. Examinemos varios casos particulares de nuestras construcciones para aclarar su estructura.

a) Es obvio que $V_1^B = \{\varnothing\}$ ya que existe la única función «vacía» cuyo campo de definición es el subconjunto $V_0^B = \varnothing$. Calculemos $V_2^B = V_1^B \cup V_2^{B*}$. Denotaremos por $\{\varnothing\}_b \in V_2^{B*}$ la función en el conjunto V_1^B de un elemento que adquiere el valor $b \in B$. Todas ellas son extensionales, así que

$$V_2^B = \{\varnothing, \{\varnothing\}_b \text{ para todos los } b \in B\}.$$

De (4) se sigue que

$$\| \varnothing \in \{\varnothing\}_b \| = b.$$

De (5) se ve que

$$\| \varnothing = \{\varnothing\}_b \| = b'.$$

Intuitivamente estas fórmulas significan que $\{\varnothing\}_b$ consta de un elemento $\varnothing$ «sobre b» y está vació fuera de b. Aplicando de nuevo (5), hallamos

$$\| \{\varnothing\}_a = \{\varnothing\}_b \| = (a' \vee b) \wedge (a \vee b') = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b').$$

De este modo, $\{\varnothing\}_a$ y $\{\varnothing\}_b$ coinciden allí, donde ora ambos son vacíos ora ambos constan de un elemento $\varnothing$, de acuerdo con la intuición.

Aplicando (6), hallamos

$$\| \{\varnothing\}_a \in \{\varnothing\}_b \| = \| \{\varnothing\}_a =$$
$$= \varnothing \| \wedge \| \varnothing \in \{\varnothing\}_b \| = a' \wedge b$$

(la única posible inclusión del tipo $\varnothing \in \{\varnothing\}$ tiene lugar allí, donde $\{\varnothing\}_a$ es vacío y $\{\varnothing\}_b$, no vacío). Sea, por último, $X \in V_3^{B*}$ cierta función extensional sobre el subconjunto V_2^B con valores en B. Entonces, según (6)

$$\| X \in \{\varnothing\}_b \| = \| X = \varnothing \| \wedge \| \varnothing \in \{\varnothing\}_b \| =$$
$$= \| X = \varnothing \| \wedge b$$

y en virtud de (5)

$$\| X = \varnothing \| = (\bigwedge_{a \in B} \| \{\varnothing\}_a \in X \|') \wedge \| \varnothing \in X \|' =$$
$$= (\bigvee_{a \in B} \| \{\varnothing\}_a \in X \| \vee \| \varnothing \in X \|)'.$$

De este modo, $\| X = \varnothing \|$ significa intuitivamente complemento al portador de X en B, y $\| X \in \{\varnothing\}_b \|$ es un conjunto, donde simultáneamente X es vacío y $\{\varnothing\}_b$ no es vacío de nuevo conforme con la fórmula corriente $\varnothing \in \{\varnothing\}$. Eso muestra, cómo los nuevos objetos de X pueden resultar elementos aleatorios de los viejos con probabilidad no nula.

b) Examinemos el caso $B = \{0, 1\}$. El espacio probabilístico respectivo es de un punto, y nuestros conjuntos aleatorios deben hacerse determinados. Y eso sucede: el universo V^B se aplica en forma natural sobre el universo de von Neumann V de modo que si denotamos por $\tilde{X} \in V$ la imagen $X \in V^B$, entonces para todos los X, Y se cumplen las condiciones:

$$\| X \in Y \| = 1 \iff \tilde{X} \in \tilde{Y}; \; \| X = Y \| =$$
$$= 1 \iff \tilde{X} = \tilde{Y}.$$

NB: $\| \varnothing = \{\varnothing\}_0 \| = 1$, pero $\varnothing \neq \{\varnothing\}_0$.

Para la construcción de esta aplicación pongamos $\widetilde{\varnothing} = \varnothing$, $\{\varnothing\}^{\sim} = \{\varnothing\}$. Luego, habiendo supuesto que la aplicación $V_\alpha^{\{0,1\}} \to V_\alpha$ con las propiedades necesarias ya está construida, la continuaremos hasta $\alpha + 1$. Con este fin al nuevo elemento $X \in V_\alpha^{\{0,1\}}$ le pondremos en correspondencia primeramente el subconjunto $V_\alpha^{\{0,1\}}$, en el cual X adquiere el valor 1, y luego la imagen de este subconjunto en V_α, o sea, el elemento $\mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$: según la definición, éste será $\widetilde{X}$.

La verificación de las propiedades de esta aplicación se ofrece al lector.

c) *Funciones de veracidad booleanas de las fórmulas del lenguaje* L_1 Set. Las determinaremos por el modelo del § 2. Introduzcamos una clase de interpretación $\overline{M}$: cada punto $\xi \in \overline{M}$ le pone en correspondencia a cualquier símbolo de la variable x del lenguaje L_1 Set cierto objeto $x^\xi = X$ del universo V^B. Consideraremos aún que cualquier punto ξ aplica el símbolo del lenguaje $\varnothing$ en el conjunto vacío $\varnothing = V_0^B$.

Si P es una fórmula elemental de $x \in y$ ó de $x = y$ del lenguaje L_1 Set, entonces los valores $\| P \| (\xi)$ se definen como $\| x^\xi \in y^\xi \| \in B$ y $\| x^\xi = y^\xi \| \in B$, respectivamente.

Para las demás fórmulas de P del lenguaje los valores $\| P \| (\xi)$ se definen luego inductivamente, exactamente con las mismas fórmulas que vienen en el p. 2.7. Sólo se ha de notar que a pesar de que en los cálculos con los cuantificadores uno se vea obligado a examinar las expresiones $\bigvee_\xi a_\xi$, $\bigwedge_\xi a_\xi$ según las familias numeradas *con la clase* $\overrightarrow{M}$, *distintos* elementos de la familia forman *el subconjunto* B, así que estas expresiones tienen sentido. Llamaremos «cierta» la fórmula P (en el modelo V^B), si $\| P \| (\xi) = 1$ para todos los ξ

y «falsa», si $\| P \| (\xi) = 0$ para todos los ξ.

Al igual que en el § 3 del cap. II se verifica que todas las tautologías y axiomas lógicos con los cuantificadores son «ciertos» y que las reglas de inferencia conservan la «veracidad». Por eso la parte restante del trabajo que ha quedada para nosotros consiste en verificar la «veracidad» de los axiomas de Zermelo—Fraenkel (para cualquier B) y la «falsedad» de la hipótesis del continuo (para la B conveniente).

5. El axioma de extensionalidad es «cierto»

Comenzaremos por la demostración de varias correlaciones que enlazan las funciones de veracidad. Ante todo, de la fórmula (5), § 4 se ve que $\| X = Y \| = \| Y = X \|$ y $\| X = X \| = 1$. El lema siguiente exige un trabajo más detallado.

5.1. Lema. *Para $X, Y, Z \in V^B$ cualesquiera tenemos*

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| X = Z \|; \tag{1}$$

$$\| X = Y \| \wedge \| Y \in Z \| \leqslant \| X \in Z \|; \tag{2}$$

$$\| X \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| X \in Z \|. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN a) (3) *es justa si $X \in D(Y)$*. En efecto, en este caso según la fórmula (5) del § 4

$$\| Y = Z \| \leqslant \| X \in Y \|' \vee \| X \in Z \|,$$

de donde, intersecando con $\| X \in Y \|$, hallamos lo requerido.

b) (3) *es justa si $X, Y \in V_\alpha^B$, $Z \in V_{\alpha+1}^B$*. En efecto, elijamos $U \in D(Y)$ y apliquemos el caso particular ya demostrado (3):

$$\| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Z \|.$$

Tomemos la intersección booleana de los dos miembros con $\| X = U \|$ y la suma booleana por todos los $U \in D(Y)$; luego aplicaremos al primer miembro la fórmula (6) del § 4 y haremos uso de la distributividad. Eso brinda

$$\| X \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \bigvee_{U \in D(Y)} \| X = U \| \wedge \| U \in Z \| \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{U \in D(Z) = V_\alpha^B} \| X = U \| \wedge \| U \in Z \| = \| X \in Z \|.$$

c) (1) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$, *si* (3) *es justa en* V^B_α. Examinemos el elemento $U \in D(X) \subseteq V^B_\alpha$. Según el p. a)

$$\| U \in X \| \wedge \| X = Y \| \leqslant \| U \in Y \|.$$

Tomemos la intersección booleana con $\| Y = Z \|$:

$$\| U \in X \| \wedge \| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \|.$$

El segundo miembro es siempre $\leqslant \| U \in Z \|$: si $Y \in V^B_\alpha$, entonces según el p. b) o la suposición inductiva; pero si $Y \in V^B_{\alpha+1}$ es nuevo, entonces según el p. a).

Pues bien, hemos establecido que para todos los $X, Y, Z \in V^B_{\alpha+1}$, $U \in D(X)$

$$\| U \in X \| \wedge \| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Z \|.$$

Aprovechando el hecho de que en cualquier álgebra booleana de $a \wedge b \leqslant c$ sigue $b \leqslant a' \vee c$, obtenemos de aquí

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in X \|' \vee \| U \in Z \|$$

y luego

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \bigwedge_{U \in D(X)} \| U \in X \|' \vee \| U \in Z \|.$$

Cambiando aquí de lugares X y Z, obtenemos para todos los $U \in D(Z)$

$$\| Z = Y \| \wedge \| Y = X \| \leqslant \bigwedge_{U \in D(Z)} \| U \in Z \|' \vee \| U \in X \|.$$

De las dos últimas fórmulas y de (5), por lo visto, sigue (3).

d) (2) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$ *si* (1) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$. En efecto, sea $U \in D(Z)$. Según (1)

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = U \| \leqslant \| X = U \|.$$

Tomemos la intersección booleana con $\| U \in Z \|$ y la suma booleana por todos los $U \in D(Z)$:

$$\| X = Y \| \wedge \left(\bigvee_{U \in D(Z)} \| U \in Z \| \wedge \| Y = U \| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{U \in D(Z)} \| X = U \| \wedge \| U \in Z \|.$$

Aplicando $(1)_{\alpha+1}$ del § 4 obtenemos (2).

e) (3) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$, *si* (2) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$. En efecto, sea $U \in D(Y)$. Según el p. a)

$$\| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Z \|.$$

Al tomar el producto booleano con $\| X = U \|$ y al aplicar (2) al segundo miembro, obtenemos

$$\| X = U \| \wedge \| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| X \in Z \|.$$

Por último, construyamos la suma booleana por todos los $U \in D(Y)$ y, al aprovechar (1) del § 4, obtendremos (3).

Por lo visto, todo lo demostrado asegure el paso inductivo de α a $\alpha + 1$.

Ahora ya podemos establecer el resultado principal de este párrafo.

5.2. Proposición. *El axioma de extensión*

$$x = y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

es «cierto».

DEMOSTRACIÓN. La fórmula $\| P \leftrightarrow Q \| (\xi) = 1$ equivale a $\| P \| (\xi) = \| Q \| (\xi)$. Por eso basta demostrar que para todos los $X, Y \in V^B$

$$\| X = Y \| = \bigwedge_{Z \in V^B} (\| Z \in X \| \vee \| Z \in Y \|') \wedge$$

$$\wedge (\| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \|).$$

La desigualdad $\geqslant$ sigue inmediatamente de la fórmula (2) del § 4. Para obtener la desigualdad inversa apuntaremos dos corolarios evidentes de (3) del lema 5.1:

$$\| X = Y \| \leqslant \| Z \in X \| \vee \| Z \in Y \|'; \quad \| X = Y \| \leqslant$$

$$\leqslant \| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \|$$

y tomaremos el producto booleano por todos los Z. La proposición queda demostrada.

Notemos que de (2) sigue *la propiedad* general *de la extensionalidad*: para todos los $X, Y, Z \in V^B$

$$\| X = Y \| \wedge \| Y \in Z \| = \| X = Y \| \wedge \| X \in Z \|.$$

5.3. Corolario. *Los axiomas de igualdad son «ciertos» en el lenguaje* L_1Set.

En efecto (véase la proposición 4.6, cap. II), ellos se deducen del axioma de extensión, de las fórmulas «ciertas» $x = x$ y $x = y \leftrightarrow \forall\ z\,(x \in z \leftrightarrow y \in z)$ con ayuda de las reglas estándares de inferencia, las cuales conservan la «veracidad».

5.4. **Nota.** En la mayoría de los cálculos para nosotros serán importantes solamente los valores $\| X \in Y \|$ y $\| X = Y \|$, y no la definición exacta de los objetos X, Y. Notemos en relación con eso que las siguientes dos relaciones binarias en V^B:

a) $\| X = Y \| = 1$,

b) $\forall Z \in V^B, \quad \| Z \in X \| = \| Z \in Y \|$,

coinciden (corolario ligero (2) y axiomas de extensión). Llamaremos *equivalentes* tales X, Y y escribiremos $X \sim Y$.

6. Los axiomas de par, de la suma, del grado y de la regularidad son «ciertos»

6.1. Los cálculos del párrafo anterior muestran que el trabajo principal para asegurar la «veracidad» del axioma de extensión estaba encajado en la definición del universo V^B. Las fórmulas explícitas para el cálculo recursivo $\| X \in Y \|$ y $\| X = Y \|$ reflejaban tantas propiedades particulares de inclusión y de igualdad que su unión garantizaba el cumplimiento del axioma general.

La verificación de una serie de otros axiomas requiere en realidad que en V^B se definan los análogos de la operaciones existentes en V, del par desordenado, del conjunto de subconjuntos, etc. Estas operaciones pueden ser definidas por medio de las fórmulas del lenguaje L_1 Set. No obstante, recordemos que si $P(x)$ es una fórmula con la única variable libre x, entonces la población $x^\xi \in V$- para las cuales $P(x^\xi)$ es cierta, forma, hablando en gene, ral, no más que una clase y no un conjunto.

Resulta cómodo introducir un concepto auxiliar de «clase aleatoria» también con respecto a V^B. Luego, las construcciones subsiguientes de las operaciones en V^B se efectúan por medio de dos procedimientos: primeramente, de significado de la operación sirve la clase aleatoria, la cual ya después se «identifica» con el conjunto aleatorio por medio de un razonamiento aislado.

6.2. **Definición.** a) *Se denomina clase aleatoria cualquier función W sobre V^B con valores en B, la cual satisface la condición de extensionalidad siguiente:*

$W(X) \wedge \| X = Y \| = W(Y) \wedge \| X = Y \|$ para todos los X, $Y \in V^B$.

b) *Se denomina equivalente al conjunto aleatorio $Z \in V^B$ (inscripción $W \sim Z$) la clase aleatoria W si $W(X) = \| X \in Z \|$ para todos los $X \in V^B$.*

6.3. Ejemplos y notas. a) Para cualquier conjunto Z aleatorio la función $X \mid\longrightarrow \| X \in Z \|$ es extensional en virtud de (2) del § 5 y por eso es una clase aleatoria. Análogamente con eso escribiremos a menudo $\| X \in W \|$ es vez de $W(X)$ y para cualesquier clases W aleatorias.

b) Existen clases aleatorias no equivalentes a los conjuntos aleatorios. Por ejemplo, la clase aleatoria «universal»: $W(X) = 1$ para todos los X. (Si no, tendríamos $\| W \in W \| = 1$ en contradicción con el axioma de regularidad, cuya «veracidad» se verificará más tarde).

c) Sea W una clase aleatoria y α, cualquier ordinal. Definamos así el elemento $W_\alpha \in V^B_{\alpha+1}$:

$$D(W_\alpha) = V^B_\alpha,\ W_\alpha = \text{acotación de } W \text{ sobre } V^B_\alpha$$

(como funciones, véase 4.2). Es fácil ver que para todos los $X \in V^B$ tenemos

$$\| X \in W_\alpha \| \leqslant \| X \in W \|. \tag{1}$$

En efecto, sean $U \in V^B_\alpha$, $X \in V^B$. Entonces tenemos

$$\| X = U \| \wedge W_\alpha(U) = \| X = U \| \wedge W(U) =$$
$$= \| X = U \| \wedge W(X) \leqslant W(X),$$

de donde en virtud de (6) del § 4:

$$\| X \in W_\alpha \| = \bigvee_{U \in V^\beta_\alpha} \| X = U \| \wedge W_\alpha(U) \leqslant$$
$$\leqslant W(X) = \| X \in W \|.$$

A continuación verificaremos a menudo que la clase W concreta que nos interesa equivale al conjunto, buscando tal ordinal α que $W \sim W_\alpha$. De (1) se ve que para esto basta verificar la desigualdad $\| X \in W \| \leqslant \| X \in W_\alpha \|$ para todos los X.

d) Sean W, W_1, W_2 clases aleatorias. Entonces $W_1 \wedge W_2$, $W_1 \vee W_2$, W' son también clases aleatorias puesto que la condición de extensionalidad para estas funciones se verifica trivialmente. Escribiremos $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ en vez de $W_1 \wedge W_2$, $W_1 \vee W_2$, respectivamente.

e) Sean W una clase aleatoria y X, un conjunto aleatorio. Demostremos que $W \cap X$ está equivalente al conjunto aleatorio. Más exacto, si $D(X) = V^B_\alpha$, entonces $W \cap X \sim (W \cap X)_\alpha$. En efecto, para cualquier $Y \in V^B$

tenemos según (6) del § 4:

$$\| Y \in (W \cap X)_\alpha \| = \bigvee_{U \in V_\alpha^B} \| U = Y \| \wedge \| U \in (W \cap X)_\alpha \| =$$

$$= \bigvee_{U \in V_\alpha^B} (\| U = Y \| \wedge \| U \in W \| \wedge \| U \in X \| =$$

$$= \bigvee_{U \in V_\alpha^B} \| U = Y \| \wedge \| Y \in W \| \wedge \| U \in X \| =$$

$$= \| Y \in W \| \wedge \| Y \in X \| = \| Y \in W \cap X \|.$$

De este resultado sigue la «veracidad» de las fórmulas de la distinción (véase el p. 4.9b, cap. II).

La proposición siguiente brinda el método común de construcción de las clases aleatorias.

6.4. Proposición. *Supongamos que* $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ *es una fórmula que no contiene variables libres excepto* x, $y_1, \ldots, y_n$. *Supongamos que* $Y_1, \ldots, Y_n \in V^B$ *son fijos. Entonces la función*

$$X \mapsto W(X) = \| P(X, Y_1, \ldots, Y_n) \|$$

es una clase aleatoria.

Intuitivamente W contiene cada conjunto X con la probabilidad, con la cual es cierta para él la afirmación $P(X)$; $Y_1, \ldots, Y_n$ desempeñan el papel de «constantes».

DEMOSTRACIÓN. Aprovechemos la «veracidad» del correspondiente axioma de igualdad:

$$\| \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n (x = y \to (P(x, y_1, \ldots, y_n) \to$$

$$\to P(y, y_1, \ldots, y_n))) \| = 1.$$

Después de examinar el punto ξ de la clase de interpretación la cual confiere a $x, y_1, \ldots, y_n$ los valores de $X, Y_1, \ldots, Y_n \in V^B$, respectivamente, obtendremos

$$\| X = Y \| \leqslant \| P(X, Y_1, \ldots, Y_n) \|' \vee$$

$$\vee \| P(Y, Y_1, \ldots, Y_n) \|$$

o

$$\| X = Y \| \wedge W(X) \leqslant W(Y),$$

de donde sigue la extensionalidad de W.

Ahora podemos comenzar la verificación de los axiomas.

6.5. Proposición. *El axioma del par*

$\forall u \forall w \exists x \forall z\, (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w)$

es «cierto»

DEMOSTRACIÓN. Según la definición tenemos

$$\| \forall u \forall w \exists x \forall z\, (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w) \| =$$

$$= \bigwedge_{U} \bigwedge_{W} \bigvee_{X} \bigwedge_{Z} \| Z \in X \leftrightarrow Z = U \vee Z = W \|.$$

Por eso basta hallar para cualesquier U, $W \in V^B$ tal $X \in V^B$ que para todos los $Z \in V^B$

$$\| Z \in X \| = \| Z = U \| \vee \| Z = W \|. \tag{2}$$

Con los U, W fijos examinemos el segundo miembro (2) como función de Z. Esta es una clase aleatoria según la proposición 6.4, ya que responde a la fórmula $z = U \vee z = W$. Demostremos que dicha clase está equivalente al conjunto aleatorio. Más exactamente, si U, $W \in V^B_\alpha$, entonces $X \sim X_\alpha$. Según la nota al final del p. 6.3c para eso basta verificar que para todos los Z

$$\| Z \in X \| \leqslant \| Z \in X_\alpha \|.$$

Pero como $\| U \in X_\alpha \| = 1$, entonces según la fórmula (2) del § 5 tenemos

$$\| Z = U \| \leqslant \| Z \in X_\alpha \|$$

y de forma análoga

$$\| Z = W \| \leqslant \| Z \in X_\alpha \|,$$

de donde sigue lo requerido.

6.6. Proposición. *El axioma de la suma*

$\forall x \exists y \forall u\, (\exists z\, (u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow u \in y)$

es «cierto».

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $X \in V^B$ y construyamos un conjunto aleatorio Y tal que para todos los $U \in V^B$

$$\| U \in Y \| = \| \exists z\, (U \in z \wedge z \in X) \| =$$

$$= \| \bigvee_{Z \in V^B} \| U \in Z \| \wedge \| Z \in X \|.$$

Según la proposición 6.4 la clase aleatoria con tal propiedad existe. Mostremos que si $D(X) = V^B_\alpha$, entonces $Y \sim Y_\alpha$. Teniendo en cuenta que $D(Y_\alpha) = D(X)$, tene-

mos

$$\| U \in Y_\alpha \| = \bigvee_{Z \in D(X)} \| U = Z \| \wedge \| Z \in Y_\alpha \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in D(X)} \| U = Z \| \wedge (\bigvee_{Z_1 \in V^B} \| Z \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \|). \quad (3)$$

Mostremos que en la suma interior (3) puede limitarse sumando por $Z_1 \in D(X)$. En efecto, para cualquier Z_1

$$\| Z_1 \in X \| = \bigvee_{Z_2 \in D(X)} \| Z_1 = Z_2 \| \wedge \| Z_2 \in X \|,$$

$$\| Z \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| = \bigvee_{Z_2 \in D(X)} \| Z \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 =$$

$$= Z_2 \| \wedge \| Z_2 \in X \| \leqslant \bigvee_{Z_2 \in D(X)} \| Z \in Z_2 \| \vee \| Z_2 \in X \|. \quad (4)$$

Tomándolo en cuenta, efectuaremos primeramente la adición en (3) por Z estando fijo $Z_1 \in D(X)$. Como $D_1(Z_1) \leqslant D(X)$, la suma por $Z \in D(X)$ coincide con la por $Z \in D(Z_1)$ y será igual a $\| U \in Z_1 \|$. Por tanto,

$$\| U \in Y_\alpha \| = \bigvee_{Z_1 \in D(X)} \| U \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| =$$

$$= \bigvee_{Z_1 \in V^B} \| U \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| = \| U \in Y \|$$

en virtud de (4).

6.7. Proposición. *El axioma del grado*

$$\forall x \exists y \forall z \, (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$$

es "cierto". (Recordemos que $z \subseteq x$ es una abreviatura para $\forall u \, (u \in z \rightarrow u \in x)$.)

DEMOSTRACIÓN. Después de fijar $X \in V^B$ construiremos tal $Y \in Y^B$ que para todos los $Z \in Y^B$

$$\| Z \in Y \| = \| Z \subseteq X \| = \bigwedge_{U \in V^B} \| U \in Z \|' \vee \| U \in X \|.$$

El segundo miembro define Y como clase aleatoria en virtud de la proposición 6.4. Mostremos que si $D(X) = V^B_\alpha$, entonces $Y \sim Y_{\alpha+1}$.

Ante todo, construiremos el elemento $Z_\alpha \in V^B_{\alpha+1}$ considerando Z como clase aleatoria. Tenemos en virtud de (1) $\| U \in Z_\alpha \|' \geqslant \| U \in Z \|'$, así que

$$\| Z \in Y \| \leqslant \| Z_\alpha \in Y \| = \| Z_\alpha \in Y_{\alpha+1} \|. \quad (5)$$

Demostraremos, además, la desigualdad

$$\| Z \in Y \| \leqslant \| Z_\alpha = Z \|. \qquad (6)$$

De (5) y (6) se sigue inmediatamente que $Y \sim Y_{\alpha+1}$, puesto que en virtud de (2), § 4

$$\| Z \in Y \| \leqslant \| Z_\alpha \in Y_{\alpha+1} \| \wedge \| Z_\alpha = Z \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Z \in Y_{\alpha+1} \|.$$

Queda verificar (6). Sea primeramente $U \in D(X) \subseteq V^B_\alpha$. Entonces $\| U \in Z_\alpha \| = \| U \in Z \|$, de donde $\| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \|' = 0$, y tanto más

$$\| U \in X \| \wedge \| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \|' = 0. \qquad (7)$$

El primer miembro de (7), siendo variable U, define la clase aleatoria de tipo $X \cap W$, donde W responde a la fórmula $\neg (u \in Z_\alpha \leftrightarrow u \in Z)$. Como $D(X) = V^B_\alpha$ tenemos en virtud de 6.3c $X \cap W \sim (X \cap W)_\alpha$. Pero de acuerdo con (7) $(X \cap W)_\alpha$ es la función nula en V^B_α y por tanto $\| U \in X \cap W \| = 0$ para todos los $U \in V^B$. Por consiguiente,

$$\| U \in X \| \leqslant \| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \subset Z \| \text{ para todos los } U. \quad (8)$$

Ahora para verificar (6) apuntaremos aparte el primero y segundo miembros (haciendo uso de la «veracidad» de la fórmula $Z_\alpha = Z \leftrightarrow \forall u\, (u \in Z_\alpha \leftrightarrow u \in Z)$:

$$\| Z \in Y \| = \bigwedge_{U \in V^B} \| U \in Z \|' \vee \| U \in X \|;$$

$$\| Z_\alpha = Z \| \bigwedge_{U \in V^B} \| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \|.$$

Ahora está claro que la desigualdad que se requiere en (6) tiene lugar término a término: para $\| U \in X \|$ eso se sigue de (8), y para $\| U \in Z \|'$, de lo que

$$\| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \| = (\| U \in Z_\alpha \|' \vee \| U \in Z \|) \wedge$$
$$\wedge (\| U \in Z_\alpha \| \vee \| U \in Z \|')$$

y $\| U \in Z \|' \leqslant \| U \in Z_\alpha \|'$ para todos los U.

6.8. Proposición. *El axioma de regularidad*

$$\forall x\, (\exists y\, (y \in x) \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

es «cierto».

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $X \in V^B$. El axioma con la «constante» X en vez de x tiene una forma de $R \rightarrow S$.

Tenemos que verificar que $\| R \to S \| = 1$. Para eso basta establecer que $\| R \| \wedge \| S \|' = 0$, donde

$$\| R \| = \bigvee_{Y \in V^B} \| Y \in X \|; \tag{9}$$

$$\| S \|' = \bigwedge_{Y \in V^B} \| Y \in X \|' \wedge (\bigvee_{Z \in V^B} \| Z \in Y \| \wedge \| Z \in X \|). \tag{10}$$

Supongamos que $\| R \| \wedge \| S \|' = a \neq 0$, y llegaremos a la contradicción. De (9) y (10) resulta que existe un $Y \in V^B$ tal que $\| Y \in X \| \wedge a \neq 0$. Elijamos Y del rango mínimo con esta propiedad.

De nuevo se ve de (9) y (10) que

$$\| Y \in X \| \wedge a \leqslant \bigvee_{Z \in V^B} \| Z \in Y \| \wedge \| Z \in X \|.$$

Por la derecha uno puede limitarse sumando por $Z \in D(Y)$ sin que se cambie toda la suma, por eso ha de existir un $Z \in D(Y)$ tal que

$$\| Z \in X \| \wedge \| Y \in X \| \wedge a \neq 0$$

y, pues, $\| Z \in X \| \wedge \alpha = 0$, pero el rango de Z es menor que el de Y lo que contradice la elección de Y.

7. Los axiomas de la infinidad, de la sustitución y de la elección son «ciertos»

7.1. Nosotros comenzaremos este párrafo por la descripción de dos métodos útiles más de construir conjuntos aleatorios. El primero de los mismos, muy usual, resuelve el problema siguiente. Supongamos que está dado el conjunto de objetos $X_i \in V^B$, $i \in I$, y de elementos $a_i \in B$. Supongamos que queremos construir un conjunto aleatorio X que contenga cada X_i con la probabilidad de a_i. Tal X puede no existir, no obstante, resulta que siempre existe un X con $\| X_i \in X \| \geqslant a_i$ para todos los $i \in I$ y, es más, existe un X mínimo con tal propiedad.

7.2. Lema. a) *En condiciones del punto anterior la función X de Y*

$$\| Y \in X \| = \bigvee_i a_i \wedge \| Y = X_i \| \tag{1}$$

es una clase aleatoria de X equivalente al conjunto aleatorio. Además, $\| X_i \in X \| \geqslant a_i$, y si X' es cualquier clase

aleatoria, para la cual $\| X_i \in X' \| \geqslant a_i$ *para todos los* i, *entonces* $\| Y \in X' \| \geqslant \| Y \in X \|$ *a todos los* Y.

Diremos que X (y cualquier conjunto equivalente a X) *recoge* X_i *con las probabilidades de* a_i.

b) *En las mismas condiciones la función* Z *de* Y

$$\| Y \in Z \| = \bigvee_i a_i \wedge \| Y \in X_i \| \qquad (2)$$

es una clase aleatoria de Z *equivalente al conjunto aleatorio. Si además* $a_i \wedge a_j = 0$ *para todos los* $i \neq j$, *entonces* $\| Z = X_i \| \geqslant a_i$ *y para cualquier clase aleatoria* Z' *con las condiciones de* $\| Z' = X_i \| \geqslant a_i$ para todos los i, tenemos $\| Y \in Z' \| \geqslant \| Y \in Z \|$ para todos los Y.

Diremos que Z *está pegado de* X_i *con las probabilidades de* a_i.

DEMOSTRACIÓN. La extensionalidad de las funciones Z y X definidas por las fórmulas (1) y (2) se verifica inmediatamente.

Existe un ordinal α tal que $X_i \in V_\alpha^B$ para todos los i. Mostraremos que $X \sim X_\alpha$ y $Z \sim Z_\alpha$. Para cualquier $Y \in V_\alpha^B$ tenemos

$$\| Y \in X_\alpha \| = \bigvee_{Z \in V^B} \| Y = Z \| \wedge \| Z \in X_\alpha \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} \bigvee_i \| Y = Z \| \wedge a_i \wedge \| Z = X_i \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} \bigvee_i a_i \wedge \| Y = X_i \| \wedge \| Z = X_i \|.$$

Examinando el término con $Z = X_i$ a la derecha, obtenemos $a_i \wedge \| Y = X_i \| \leqslant \| Y \in X_i \|$, de donde en virtud de (1) $\| Y \in X \| \leqslant \| Y \in X_\alpha \|$, lo que basta según el p. 6.3d.

De forma análoga para cualquier $Y \in V^B$

$$\| Y \in Z_\alpha \| = \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} \bigvee_i \| Y = Z \| \wedge a_i \wedge \| Z \in X_i \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} \bigvee_i a_i \wedge \| Y \in X_i \| \wedge \| Y = Z \|.$$

Además, $\| Y \in X_i \| = \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} \| Y = Z \| \wedge \| Y \in X_i \|$,

de donde resulta que $a_i \wedge \| Y \in X_i \| \leqslant \| Y \in Z_\alpha \|$ y con ayuda de (2) $\| Y \in Z \| \leqslant \| Y \in Z_\alpha \|$.

Sean ahora X, Z cualesquier conjuntos aleatorios con propiedades de (1), (2). De (1) está claro que $\| X_i \in X \| \geqslant \geqslant a_i$. Si $\| X_i \in X' \| \geqslant a_i$ para todos los i, entonces $\| Y \in X' \| = \bigvee_Z \| Y = Z \| \wedge \| Z \in X' \| \leqslant \bigvee_i \| Y = X_i \| \wedge \| X_i \in X' \| \geqslant \| Y \in X \|$ en virtud de (1). De forma análoga, si $a_i \wedge a_j = 0$ para $i \neq j$, entonces de (2) se ve que $a_i \wedge \| Y \in Z \| = a_i \wedge \| Y \in X_i \|$, de donde

$$a_i \wedge \| X_i = Z \| = \bigvee_Y a_i \wedge \| Y \in X_i \longleftrightarrow Y \in Z \| =$$

$$= a_i; \quad \text{y} \quad X_i = Z \| \geqslant a_i.$$

No obstante, si $\| X_i = Z' \| \geqslant a_i$ para todos los i, entonces

$$\| Y \in Z' \| \geqslant \| Y \in Z' \| \wedge \| Z' = X_i \| =$$

$$= \| Y \in X_i \| \wedge \| Z' = X_i \| \geqslant a_i \wedge \| Y \in X_i \|,$$

así que $\| Y \in Z' \| \geqslant \| Y \in Z \|$.

He aquí el primer ejemplo de utilización del lema 7.2a.

7.3. Proposición. *El axioma de la infinidad*

$$\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall u (u \in x \to \{u\} \in x))$$

es «cierto».

DEMOSTRACIÓN. Verificando la «veracidad» del axioma del par, hemos construido para cualesquier U, $W \in V^B$ (salvo la equivalencia) el elemento $Z \in V^B$ con la propiedad $\| Y \in Z \| = \| Y = U \vee Y = W \|$ para todas las Y. Es natural denotar tal elemento por $\{U, W\}^B$. Respectivamente el camino de $\{U\}^B = \{U, U\}^B$.

Procedamos ahora a la verificación del axioma. Pongamos $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{\varnothing\}^B, \ldots, X_n = \{X_{n-1}\}^B$. Luego, denotemos por $X \in V^B$ el elemento que recoge todos los X_i con las probabilidades de 1. Comprobaremos que $\| \varnothing \in X \wedge \forall u (u \in X \to \{u\} \in X) \| = 1$.

Por lo visto, basta establecer que para todos los $U \in V^B$ tenemos $\| U \in X \| \leqslant \| \{U\}^B \in X$, es decir, en virtud de (1).

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} \| U = X_i \| \leqslant \bigvee_{i=0}^{\infty} \| \{U\}^B = X_i \|.$$

En efecto, de la «veracidad» de la fórmula $u \in x \longleftrightarrow \{u\} = = \{x\}$ y de lo que $X_{i+1} = \{X_i\}^B$ inmediatamente se

deduce que $\| U = X_i \| = \| \{U\}^B = X_{i+1}$.

El lema 7.2b lo necesitaremos para demostrar el hecho auxiliar siguiente:

7.4. Lema. *Sea W cierta clase aleatoria. Entonces existe un elemento $X \in V^B$ tal que*

$$\bigvee_{U \in V^B} W(U) = W(X)$$

El primer miembro puede ser representado en forma de $\| \exists x (x \in W) \| = \| W \neq \varnothing \|$. Por eso el sentido intuitivo del lema es tal: la probabilidad de que la clase no sea vacía coincide con la de la entrada en ella de un elemento adecuado.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, existe un ordinal β tal que $\bigvee_{U \in V^B} W(U) = \bigvee_{U \in V^B_\beta} W(U)$. En efecto, sea $a_\gamma = \bigvee_{U \in V^B_\gamma} W(U)$ y para cualquier $a \in B$ pongamos $\gamma(a) = \min\{\gamma \mid a_\gamma > a\}$ (ó 0, si $a_\gamma \leqslant a$ para todos los γ). Pongamos, por último, $\beta = \sup_{a \in B} \gamma(a)$. Esto es un ordinal, ya que B es un conjunto. Si $\gamma > \beta$, entonces $a_\gamma \geqslant a_\beta$ en virtud de la monotonía, pero $a_\gamma > a_\beta$ no lo puede ser según la elección de γ.

Pues bien, sea $\bigvee_U W(U) = \bigvee_{U \in V^B_\beta} W(U)$. Enumeremos todos los elementos de V^B_β con cierto segmento inicial de ordinales (¡axioma de elección!): $V^B_\beta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Pongamos

$$a_\alpha = W(U_\alpha) \wedge \Big(\bigvee_{\gamma < \alpha} W(U_\gamma)\Big)', \quad \alpha = I.$$

Por lo visto, $a_\alpha \wedge a_\gamma = 0$ para $\alpha \neq \gamma$. Haciendo uso del lema 7.2b, pegaremos los conjuntos U_α con las probabilidades a_α $(\alpha \in I)$. Obtendremos el conjunto X con las condiciones de $\| X = U_\alpha \| \geqslant a_\alpha \geqslant W(U_\alpha)$. Haciendo uso de la extensionalidad W, hallamos

$$W(X) \geqslant \bigvee_{\alpha \in I} \| X = U_\alpha \| \wedge W(U_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} W(U_\alpha) = \bigvee_{U \in V^B} W(U).$$

7.5. Proposición. *El axioma de la sustitución*

$$\forall \bar{z} \forall u (\forall x (x \in u \to \exists ! y P (x, y, \bar{z})) \to$$
$$\to \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge P (x, y, \bar{z}))))$$

es «cierto» (aquí $\bar{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$*).*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos el "vector" $\bar{Z} = \langle Z_1, \ldots, Z_n \rangle$ con $Z_i \in V^B$ y el elemento $U \in V^B$. En vez de $P (x, y, \bar{Z})$ escribiremos $P (x, y)$, etc. Al representar el axioma con las «constantes» Z_i, U en forma de $R \to S$ tenemos que demostrar que $\| R \to S \| = 1$.

7.6. Caso particular: *si* $\| R \| = 1$, *entonces* $\| S \| = 1$.

Mostremos primeramente como el caso general se deduce de eso.

Sea $a \in B$. Denotemos por B_a el conjunto $\{b \in B \mid b \leqslant a\}$. Las operaciones B inducen en B_a la estructura del álgebra booleana con la unidad $1_a = a$. La aplicación natural $B \mapsto B_a$: $b \mapsto b \wedge a = b_a$ es un homomorfismo. La ligera inducción por α permite construir la aplicación sobreyectiva de los universos $V^B \to V^{B_a}$: $X \to X_a$ tal que para todos los $X, Y \in V^B$

$$\| X_a \in Y_a \| = \| X \in Y \| \wedge a; \quad \| X_a = Y_a \| = \| X = Y \| \wedge a.$$

Ahora elijamos en las notaciones anteriores $a = \| R \|$. Entonces $\| R \|_a = 1_a$, así que en virtud de 7.6. $\| S \|_a = 1_a$. Eso significa que $\| S \| \geqslant a$, así que $\| R \to S \| = 1$. (En este razonamiento hacíamos uso del p. 7.6 para V^{B_a}: está claro que $\| R \|_a = \| R_a \|$ en abreviaturas obvias.)

7.7. DEMOSTRACIÓN DE 7.6. La condición $\| R \| = 1$ significa que para cualquier $X \in V^B$

$$\| X \in U \| \leqslant \| \exists ! y P (X, y) \|. \tag{3}$$

Para verificar la condición $\| S \| = 1$ basta hallar para cualquier $U \in V^B$ un $W \in V^B$ tal que para todos los $Y \in V^B$

$$\| Y \in W \| = \bigvee_{X \in V^B} \| X \in U \| \wedge \| P (X, Y) \|. \tag{4}$$

La fórmula (4) define W como una clase aleatoria en virtud de la proposición 6.4. Hallemos tal α que $W \sim W_\alpha$.

Con este fin notemos primeramente que en (4) pode-

mos limitarnos a sumar por $X \in D(U)$:

$$\| Y \in W \| = \bigvee_{X \in D(U)} \| X \in U \| \wedge \| P(X, Y) \| \qquad (5)$$

(la demostración es la misma como el razonamiento después de la fórmula (3) del § 6).

Apliquemos ahora el lema 7.4 a la clase $W_X(Y) = \| P(X, Y) \|$. Dicho lema permitirá hallar para cada $X \in D(U)$ un elemento $Y_X \in V^B$ tal que

$$\| \exists y P(X, y) \| = \| P(X, Y_X) \|. \qquad (6)$$

(Como $\| \exists ! y P(X, y) \| \leqslant \| \exists y P(X, y) \|$, podremos aprovechar estos Y_X para estimar $\| X \in U \|$ con ayuda de (9).)

Pongamos

$$\alpha = \sup (\alpha_X \mid Y_X \in V^B_{\alpha_X}) \text{ por todos los } X \in D(U)$$

y mostremos que $W \sim W_\alpha$ para este α. Tenemos que verificar que para todo Y tenemos $\| Y \in W \| \leqslant \| Y \in W_\alpha \|$, y para eso en virtud de (5) y (2) del § 4 basta establecer que para cualquier $X \in D(U)$

$$\| X \in U \| \wedge \| P(X, Y) \| \leqslant \| Y = Y_X \| \wedge$$
$$\wedge \| Y_X \in W_\alpha \|. \qquad (7)$$

Ante todo tenemos en virtud de (3), (5), (6) y de la definición α:

$$\| X \in U \| \leqslant \| P(X, Y_X) \| \leqslant \| Y_X \in W \| =$$
$$= \| Y_X \in W_\alpha \|. \qquad (8)$$

Luego examinemos la fórmula la cual es «cierta», puesto que se deduce de los axiomas lógicos y el axioma de igualdad:

$$\forall x \exists ! y P(x, y) \wedge P(x, y_1) \wedge P(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2.$$

De ella hallamos

$$\bigvee_{X_1 \in V^B} \| \exists ! y P(X_1, y) \| \wedge \| P(X, Y) \| \wedge \| P(X, Y_X) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Y = Y_X \|. \qquad (9)$$

Por último, tomando en cuenta que $\| X \in U \| \leqslant \leqslant \bigvee_{X_1 \in V^B} \| \exists ! y P(X_1, y) \|$ en virtud de (3) y $\| X \in U \| \leqslant \leqslant \| P(X, Y_X) \|$ en virtud de 8, multipliquemos tér-

mino a término las desigualdades (8) y (9). Eso brindará

$\| X \in U \| \wedge \| P(X, Y) \| \leqslant \| Y = Y_X \| \wedge$
$\wedge \| Y_X \in W_\alpha \|$,

o sea (7).

7.8. Proposición. *El axioma de la elección es «cierto».*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el axioma de la elección tiene una forma de $\forall x \exists y (Q \wedge R \wedge S \wedge T)$, donde Q significa:

$$\forall z (z \in y \rightarrow \exists u \exists w (z = \langle u, w \rangle))$$

(«y es una correspondencia binaria»);

R significa:

$$\forall u \forall w_1 \forall w_2 (\langle u, w_1 \rangle \in y \wedge \langle u, w_2 \rangle \in y \rightarrow w_1 = w_2)$$

(«y es una función»);

S significa:

$$\forall u (\exists w (\langle u, w \rangle \in y) \rightarrow u \in x)$$

(«el campo de definición de y está contenido en x»);

T significa:

$$\forall u (u \neq \varnothing \wedge u \in x \rightarrow \exists w (w \in u \wedge \langle u, w \rangle \in y)$$

(«el campo de definición de y coincide con x; y elige un elemento de cada elemento x no vacío»).

Fijemos $X \in V^B$ y construyamos para X la «función que elige» Y. Para eso

a) enumeremos $D(X)$ con el segmento inicial de ordinales:

$$D(X) = \{U_0, U_1, \ldots, U_\alpha, \ldots\}, \alpha \in I;$$

b) hallamos para cada $U_\alpha \in D(X)$ según el lema 7.4 un elemento $W_\alpha \in V^B$ tal que

$$\| W_\alpha \in U_\alpha \| = \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \|;$$

c) pongamos para cada $\alpha \in I$

$$a_\alpha = \| U_\alpha \in X \| \wedge (\bigwedge_{\beta < \alpha} \| U_\beta \in X \|' \vee \| U_\beta = U_\alpha \|');$$

d) por último, denotemos por Y el conjunto que «recoge los pares ordenados» $\langle U_\alpha, W_\alpha \rangle^B$ con las probabilidades a_α, $\alpha \in I$. Aquí, naturalmente, $\langle U, W \rangle^B = \{\{U\}^B, \{U, W\}^B\}^B$.

El sentido de la construcción es tal: en cada U_α elegimos un elemento W_α que entra en U_α «con la probabilidad máxima posible», pero después incluimos los «pares» $(U_\alpha, W_\alpha)^B$ en el gráfico Y de la función de la elección por turno, cada subsiguiente sólo en tanto, en cuanto antes U_α «no se tenía en cuenta» en X.

Sustituyamos ahora x, y por X, Y en el axioma de la elección y, denotando por Q, R, S, T las fórmulas respectivas con las constantes, verifiquemos que $\| Q \| = \| R \| = \| S \| = \| T \| = 1$.

Usaremos constantemente la fórmula que se deduce de (2) y de la definición de Y:

$$\| Z \in_1 Y \| = \bigvee_\alpha \| Z = (U_\alpha, W_\alpha)^B \| \wedge a_\alpha. \tag{10}$$

7.9. $\| Q \| = 1$. Según la definición de Q eso significa que para $Z \in V^B$ debo haber $\| Z \in Y \| \leqslant \bigwedge_{U, W} \| Z = (U, W)^B \|$, y eso es evidente de (10).

7.10. $\| R \| = 1$. Según la definición de R para cualesquier U, W^1, $W^2 \in V^B$ tenemos que demostrar la desigualdad

$$\| (U, W^1)^B \in Y \| \wedge \| (U, W^2)^B \in Y \| \leqslant W^1 - W^2 \|.$$

Con ayuda de (10) el primer miembro se copia en forma de

$$\bigvee_{\alpha, \beta} \| U = U_\alpha \| \wedge \| W^1 = W_\alpha \| \wedge a_\alpha \wedge \| U = U_\beta \| \wedge \| W^2 = W_\beta \| \wedge a_\beta.$$

Como $\| U = U_\alpha \| \wedge \| U = U_\beta \| \leqslant \| U_\alpha = U_\beta \|$ y $\| U_\alpha = U_\beta \| \wedge a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$ (véase la definición de a_α), en esta suma se puede dejar sólo los términos con $\alpha = \beta$. En cada tal término hay un factor $\| W^1 = W_\alpha \wedge \| W^2 = W_\alpha \| \leqslant \| W^1 = W^2 \|$ lo que demuestra lo requerido.

7.11. $\| S \| = 1$. Esta identidad equivale a la fórmula

$$\| (U, W)^B \in Y \| \leqslant \| U \in X \|.$$

Pero el primer miembro en virtud de (10) es igual a

$$\bigvee \| U = U_\alpha \| \wedge \| W = W_\alpha \| \wedge a_\alpha \leqslant \bigvee_\alpha \| U = U_\alpha \| \wedge \| W = W_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in X \| \leqslant \bigvee_\alpha \| U = U_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in X \| = \| U \in X \|.$$

7.12. $\| T \| = 1$. Nosotros debemos demostrar la igualdad (para cualquier $U \in V^B$)

$$\| U \in X \| \wedge \| U \neq \varnothing \| \leqslant \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U \| \wedge$$

$$\wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|. \tag{11}$$

Como ya notamos repetidas veces

$$\bigvee_{U \in V^B} \| U \in X \| \wedge \| U \neq \varnothing \| = \bigvee_{U \in D(X)} \| U \in X \| \wedge \| U \neq \varnothing \|.$$

Por eso en (11) basta limitarse a los elementos U, $\alpha \in I$. Luego,

$$\| U_\alpha \neq \varnothing \| = \| \exists w \, (w \in U_\alpha) \| = \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| =$$

$$= \| W_\alpha \in U_\alpha \|.$$

Por eso (11) se convierte en una desigualdad

$$\| U_\alpha \in X \| \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \|. \tag{12}$$

Para su demostración emplearemos la inducción por α. Con $\alpha = 0$ ella es evidente, puesto que el término a la derecha con $W = W_0$ coincide con el primer miembro. Supongamos que dicha desigualdad es justa para todas las $\beta < \alpha$.

Según la definición de a_α

$$\| U_\alpha \in X \| = a_\alpha \vee \left(\bigvee_{\beta < \alpha} \| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \right).$$

Introduciendo esta fórmula en el primer miembro de (12) obtendremos que sea necesario demostrar dos desigualdades:

$$a_\alpha \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \|; \tag{13}$$

$$\| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \| \tag{14}$$

para todas las $\beta < \alpha$.

La desigualdad (13) es evidente: para su verificación basta analizar el término a la derecha con $W = W_\alpha$. La desigualdad (14) se reduce a la suposición inductiva de modo siguiente. El primer miembro se mayorea me-

diante la magnitud

$$\| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in U_\beta \| \leqslant$$
$$\leqslant \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| W_\beta \in U_\beta \|$$

según la definición W_β. Luego, según la inducción y en virtud de la extensionalidad

$$\| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| U_\beta \in X \| \wedge \| W_\beta \in U_\beta \| \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\beta \| \wedge \langle U_\beta, W \rangle^B \in Y \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \|,$$

lo que finaliza la verificación del axioma de elección.

8. La hipótesis del continuo es «falsa» para los B convenientes

8.1. Recordemos (lema 7.2a) que el conjunto $X \in V^B$ recoge los conjuntos $\{X_i\}$ con las probabilidades $a_i \in \in B$ $(i \in I)$, si $\| Y \in X \| = \bigvee_i \| Y = X_i \| \wedge a_i$ para todos los Y.

Haciendo uso de esta definición podemos introducir una aplicación canónica útil del universo de von Neumann V en V^B: $t \mapsto \hat{t}$. Supongamos que $\hat{\varnothing} = \varnothing$ (recordemos que $\| Y \in \varnothing \| = 0$ para todos los Y), y si $\hat{s}$ ya están definidos para todos los $s \in V_\alpha$, entonces para $t \in V_{\alpha+1}$ pongamos:

$\hat{t}$ recoge con las probabilidades de 1 todos los $\hat{s}$ para $s \in t$.

En otras palabras, para cualquier $Y \in V^B$

$$\| Y \in \hat{t} \| = \bigvee_{s \in t} \| Y = \hat{s} \|. \qquad (1)$$

(El objeto recogedor está definido no unívocamente sino sólo salvo la equivalencia, así que, hablando estrictamente, conviniera señalar el rango de $\hat{t}$, por ejemplo, exigir que coincida con el rango de t. Eso no es esencial, puesto que nos interesarán solamente las funciones de veracidad que no varían al reemplazar cualquier objeto por otro equivalente a él.)

Ahora podemos formular las condiciones adicionales (excepto la completitud) que serán superpuestas sobre el álgebra booleana B para las necesidades de este párrafo.

Recordemos que ω_0 es el primer ordinal infinito; ω_1. el primer ordinal de potencia $>\omega_2$; ω_2 es el primer ordinal de potencia $>\omega_1$.

8.2. Condiciones sobre B. a) *Condición de numerabilidad.* Recordemos su contenido: si se da una familia de elementos $\{a_i\}$, $i \in I$, con las condiciones $a_i \neq 0$, $a_i \wedge \wedge a_j = 0$ para $i \neq j$, entonces I no es más que numerable.

b) Existe una familia de elementos $b(n, \alpha) \in B$ enumerada por el conjunto $\omega_0 \times \omega_2$ con la propiedad siguiente: si $Z(\alpha)$ recoge los elementos n, $n \in \omega_0$ con las probabilidades $b(n, \alpha)$, entonces $\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = 0$ para $\alpha \neq \beta$.

El sentido intuitivo de la segunda condición es el siguiente. Es fácil ver que $\| Z(\alpha) \subseteq \hat{\omega}_0 \| = 1$. En efecto, esta condición equivale a $\| \forall x\, (x \in Z(\alpha) \rightarrow x \in \hat{\omega}_0 \| = = 1$, o sea, a

$$\forall X \in V^B, \quad \| X \in Z(\alpha) \| \leqslant X \in \hat{\omega}_0 \|,$$

lo que es obvio de (1), puesto que $\hat{\omega}_0$ recoge $\hat{n}$ con las probabilidades de 1, mientras que $Z(\alpha)$, con las de $b(n, \alpha) \leqslant \leqslant 1$.

De este modo, la condición (8.2b) significa que podemos componer ω_2 de distintos subconjuntos $Z(\alpha) \subseteq \omega_0$, así que en el sentido ingenuo de la palabra card $(\hat{\omega}_0) > > \omega_1$ es precisamente la negación de la hipótesis del continuo. Desde luego, es necesario también verificar la posibilidad de convertir esta consideración intuitiva en una demostración.

8.3. Existencia de B con propiedades necesarias. Se podría hacer uso de los conjuntos medibles como en el § 3. Para variar y comparar con el § 9 aduciremos una construcción más. Sea $\{0, 1\}$ un espacio discreto de dos puntos; sea $I = \omega_0 \times \omega_2$, $S = \{0, 1\}^I$ un espacio de vectores de 0 y 1, cuyas coordenadas están enumeradas por el conjunto I. Introduzcamos en S la topología de producto directo. Su base estándar forma subconjuntos abiertos que se componen de todos los vectores, cuyas coordenadas están fijadas en cierto subconjunto finito $J \subset I$.

Si $a \subseteq S$ pondremos

a' = complemento de clausura de a en S, $a'' = = (a')'$.

Los conjuntos $a \subseteq S$ con $a'' = a$ se denominan conjuntos abiertos regulares del espacio X.

8.4. TEOREMA. *Pongamos*

$B = \{a \subseteq S \mid a'' = a\}$, $a \wedge b = a \cap b$; $a \vee b = (a \cup b)''$.

Entonces B con las operaciones $\vee$, $\wedge$ *y* $'$ *es el álgebra booleana completa con condición de numerabilidad,* $u \bigvee_i a_i = (\bigcup_i a_i)''$ *para cualquier familia* $a_i \in B$.

Omitamos la demostración: véase Rosser [6, cap. 2].

8.5. LEMA. *En condiciones del teorema 8.4 pongamos:* $b(n, \alpha)$ *es un conjunto de vectores con 1 en el lugar* (n, α) *y definamos* $Z(\alpha)$ *como en el p. 8.2b. Entonces* $\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = 0$ *para* $\alpha \neq \beta$.

DEMOSTRACION. Según la fórmula (5) del § 4

$$\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = \bigwedge_{n \in \omega_n} (b(n, \alpha) \wedge b(n, \beta)) \vee' \vee (b(n, \alpha)' \wedge b(n, \beta)').$$

El segundo miembro sólo puede aumentarse, si reemplazamos $\wedge$ por $\cap$ y $\vee$ por $\cup$; las virgulillas coinciden aquí con los complementos corrientes. Si $\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| \neq 0$, entonces habría de existir un elemento de la base estándar de la topología X, descrita al principio del p. 8.3, el que está contenido en

$$\bigcap_{n \in \omega_n} (b(n, \alpha) \cap b(n, \beta)) \cup (b, (n, \alpha)' \cap b(n, \beta)').$$

Pero esta intersección se compone de vectores, cuyas coordenadas en los lugares (n, α) y (n, β) son iguales para todos los n, mientras que en cualquier elemento de la base estándar las topologías de acotación están superpuestas solamente sobre el número finito de coordenadas.

8.6. Formulación de la negación de hipótesis del continuo. Demostraremos la "veracidad" de la fórmula siguiente: $\neg$HC: $\forall x$ ((x *es ordinal* $\wedge$ x *no es finito* $\wedge \forall y$ ($y \in x \rightarrow y$ *es finito*)) $\rightarrow \exists w$ (*no hay función de* x *para todos los* ω $\wedge$ *no hay función de* w *para* $\mathcal{P}(x)$).

Aquí x es finito: $\forall y$ ($y \subseteq x \wedge y \neq x \rightarrow$ no hay función de y para todos los x).

El descifrado de las demás abreviaturas lo dejamos al lector.

La premisa en $\neg$HC significa: "x es el primer ordinal infinito"; la conclusión: «w es un conjunto de potencia estrictamente intermedia entre la potencia de x y la de $\mathcal{P}(x)$».

Escribiremos abreviadamente $\neg$HC en forma de

$$\forall x \, (P(x) \rightarrow \exists w \, (Q_1(x, w) \wedge Q_2(x, w))). \tag{2}$$

8.7. Lema de reducción. *Sean $P(x)$, $Q(x)$ dos fórmulas del lenguaje de Zermelo—Fraenkel con la única variable libre x y con las propiedades siguientes:*

La fórmula $\exists! x P(x)$ puede ser deducida de los axiomas;

$X_0 \in V^B$ es un elemento tal que $\| P(X_0) \| = 1$.

Entonces $\| P(X) \| = \| X = X_0 \|$ para todos los X, y si $\| Q(X_0) \| = 1$, entonces $\| \forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x)) \| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos ante todo que $\| \exists x P(x) \| \geqslant \geqslant \| \leqslant \| \exists! x P(x) \| = 1$ puesto que todos los axiomas son "ciertos" en V^B, y las reglas de inferencia conservan la "veracidad". Entonces, la existencia del objeto $X_0 \in V^B$ con $\| P(X_0) \| = 1$ se asegura por el lema 7.4.

Luego, $P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y$ también puede ser deducida, de donde, aplicándolo a X en lugar de x y a X_0 en lugar de y, hallamos

$$\| P(X) \| \leqslant \| X = X_0 \|, \tag{3}$$

pero $\| P(X) \| \wedge \| X = X_0 \| = \| P(X_0) \| \wedge \| X = X_0 \|$; comparándolo con (3) obtenemos que en (3) podemos colocar una igualdad.

Por último, supongamos que $\| Q(X_0) \| = 1$. Entonces según lo demostrado

$$\| P(X) \| = \| Q(X_0) \| \wedge \| X = X_0 \| = \| Q(X) \| \wedge$$
$$\wedge \| X = X_0 \| = \| Q(X) \| \wedge \| P(X) \|,$$

de donde $\| P(X) \| \leqslant \| Q(X) \|$ y $\| \forall x \, (P(x) \rightarrow \rightarrow Q(x)) \| = 1$.

Este lema puede ser aplicado a la demostración de $\neg$HC en forma de (2) porque de los axiomas puede ser deducida la fórmula $\exists! x P(x)$, donde $P(x)$ es la premisa «x es el primer ordinal infinito». No aduciremos la conclusión formal respectiva, y quedaremos satisfechos constatando que la unicidad de ω_0 es notoria.

Ahora, en virtud del lema 8.7, para verificar $\neg$HC basta establecer los hechos siguientes:

8.8. $\| P(\hat{\omega}_0) \| = 1$.

(Con otras palabras, el papel de X_0 en nuestra situación lo desempeña $\hat{\omega}_0$.)

8.9. $\| Q_1(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1) \| = 1$.

8.10. $\| Q_2(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1) \| = 1$

(pues $\| \exists w (Q_1(\hat{\omega}_0, w) \wedge Q_2(\hat{\omega}_0, w)) \| = 1$, lo que termina la verificación de las condiciones del lema).

La verificación de 8.8. se realiza casi mecánicamente, y la dejamos aquí en calidad de ejercicio.

8.11. Verificación del p. 8.9. Hemos de establecer que si B satisface la condición de numerabilidad, entonces $\| \exists$ función de $\hat{\omega}_0$ para todos los $\hat{\omega}_1 \| = 0$. La demostración siguiente se atribuye palabra por palabra al caso más general, cuando en vez de ω_0, ω_1 se toma cualquier par de $s, t \in V$ con card $s <$ card t y card s es infinito.

Supongamos que

$$0 \neq a = \| \exists f (f \text{ función } \wedge \forall y (y \in \hat{\omega}_1 \to \exists x (x \in$$
$$\in \hat{\omega}_0 \wedge \langle x, y \rangle \in f))) \|,$$

y llegaremos a la contradicción. Debe existir un elemento $F \in V^B$ tal que

$$a \leqslant \| F \text{ función } \| \wedge \bigwedge_Y (\ldots).$$

Para cada $\alpha \in \omega_1$ examinaremos el término del producto que responde a $Y = \hat{\alpha}$ y tomaremos en cuenta que $\| \alpha \in \in \hat{\omega} \| \omega = 1$. Obtendremos

$$a \leqslant \| F \text{ función } \| \wedge (\bigvee_X \| X \in \hat{\omega}_0 \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha} \rangle^B \in F \|. \quad (4)$$

En virtud de (1)

$$\| X \in \hat{\omega}_0 \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha} \rangle^B \in F \| = \bigvee_{n < \omega_0} \| X =$$
$$= \hat{n} \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha} \rangle^B \in F = \bigvee_{n < \omega_0} \| X = \hat{n} \| \wedge \| \langle \hat{n}, \hat{\alpha} \rangle^B \in F \|,$$

así que, sumando primeramente por X y luego por n, se puede representar (4) en forma de

$$a \leqslant \| F \text{ función } \| \wedge \bigvee_{n < \omega_0} \| \langle \hat{n}, \hat{\alpha} \rangle^B \in F \|.$$

Entonces, para cada $\alpha < \omega_1$ se hallará un $n(\alpha) < \omega_0$ tal que

$$\| F \text{ función } \| \wedge \| \langle n(\hat{\alpha}), \hat{\alpha} \rangle^B \in F \| \neq 0.$$

Por eso existe tal valor de n_0 y tal subconjunto $J \subseteq \omega_1$ de potencia ω_1 que

$0 \neq a_\alpha = \| F$ función $\| \wedge \| \langle \hat{n}_0, \hat{\alpha}_0 \rangle^B \in F \|$ para todos los $\alpha \in J$.

Queda verificar que $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ a $\alpha \neq \beta$ lo que contradice la condición de numerabilidad para B. Como según la definición de la función

$$a_\alpha \wedge a_\beta = \| F \text{ función} \| \wedge \| \langle \hat{n}_0, \hat{\alpha} \rangle^B \in F \| \wedge \| \langle n_0, \beta \rangle^B \in F \| \leqslant \| \hat{\alpha} = \hat{\beta} \|$$

basta verificar que si $\alpha \neq \beta$, entonces $\| \hat{\alpha} = \hat{\beta} \| = 0$.

En efecto, si, digamos, $\gamma \in \alpha$, pero $\gamma \notin \eta$, entonces en la fórmula (5) del § 4 para $\| \alpha = \beta \|$ existe un término nulo $\| \hat{\gamma} \in \hat{\alpha} \|' \vee \| \hat{\gamma} \in \hat{\beta} \|$. (La verificación de lo que $\| \hat{\gamma} \in \hat{\beta} \| = 0$ para $\gamma \notin \beta$ por su parte requiere conocimiento de lo que $\| \hat{\gamma} = \hat{\delta} \| = 0$ para $\gamma \neq \delta$, pero sólo para γ y δ de rango menor que α y β, así que la demostración completa requiere una inducción por el rango.)

8.12. Verificación de 8.10. Hemos de establecer que $\| \exists$ función de $\hat{\omega}_1$ en $P^B(\omega_0) \| = 0$, o sea, que

$$\| \exists g \, (g \text{ función } \vee \forall z \, (z \subseteq \hat{\omega}_0 \rightarrow \exists y \, (y \in \omega_1 \wedge \wedge \langle y, z \rangle \exists g)) \| = 0.$$

Supongamos que para cierto $G \in V^B$ tenemos $0 \neq a = \| G$ función $\| \wedge \bigwedge_z (\ldots)$. Examinemos para cada $\alpha < \omega_2$ el término que responde a $Z = Z(\alpha)$ (definición en los p.p. 8.1 y 8.5) y tomemos en consideración que $\| Z(\alpha) \subseteq \hat{\omega}_0 \| = 1$:

$$0 \neq a \leqslant \| G \text{ función} \| \wedge \bigvee_Y \| Y \in \hat{\omega}_1 \| \wedge' \| \langle Y, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|. \quad (5)$$

En virtud de (1)

$$\| Y \in \hat{\omega}_1 \| \wedge \| \langle Y, Z(\alpha) \rangle^B \in G \| = \bigvee_{\beta < \omega_1} \| Y = \hat{\beta} \| \wedge \| \langle Y, Z(\alpha) \rangle^B \in G \| = \bigvee_{\beta < \omega_1} \| Y = \hat{\beta} \| \wedge \| \langle \hat{\beta}, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|.$$

Sumando primeramente por Y copiemos (5) en forma de

$$0 \neq a \leqslant \| G \text{ función} \| \wedge \bigvee_{\beta < \omega_1} \| \langle \hat{\beta}, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|.$$

Entonces, para cada $\alpha < \omega_2$ existirá un $\beta(\alpha) < \omega_1$ tal que

$$0 \neq a_\alpha = \| G \text{ función} \| \wedge \| \langle \beta(\alpha)^\wedge, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|.$$

Por eso existirán tal valor de $\beta_0 < \omega_1$ y tal subconjunto $J \subseteq \omega_2$ de potencia ω_2 que

$0 \neq a_\alpha = \| G$ función $\| \wedge \| \langle \hat{\beta}_0, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|$ para todos los $\alpha \in J$.

Nosotros llegaremos a la contradicción con la condición de numerabilidad, al igual que en el punto anterior, si mostramos que $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$, pero eso resulta de que $a_\alpha \wedge a_\beta \leqslant \| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = 0$ en virtud del lema 8.5.

9. ¡Cuál es la potencia del continuo!

9.1. Después de todo lo que hemos conocido acerca del lenguaje y la axiomática de Zermelo—Fraenkel, puede parecer ingenuo reanudar este problema, no obstante, eso es inevitable si se considera que el sentido es el valor principal.

Entre los especialistas de los fundamentos de las matemáticas existe y está difundido el punto de vista según el cual la contestación consiste en que el problema es absurdo. Parece que a tal punto de vista comenzó a inclinarse Paul Cohen mismo [19] reconociendo que con ello «asume una carga pesada».

Desde luego, a partir de estas posiciones ha de ser rechazada casi toda la semántica del lenguaje L_1 Set, incluso a ciencia cierta los pisos V_α del universo de von Neumann comenzando de $\alpha = \omega_0 + 1$. Ninguna solución indecisa puede salvar la situación, por cuanto las cuestiones acerca de los axiomas superiores de la infinidad o de los tal llamados «cardinales medibles» se hallen en una posición aún peor que la HC.

En tal caso es necesario emprender una búsqueda seria de lenguajes alternativos y de semántica. Las discrepancias aquí son grandes e irreconciliables. La posición más nítida la ocupan los constructivistas a pesar de que tienen opiniones de distintos matices. Ellos rechazan la infini-

dad actual y las demostraciones no eficaces de la existencia. (A propósito, lo último en la práctica a menudo se reduce al uso de las palabras más diferenciado: «no puede no existir», «cuasi-existe», que es casi sinónimo de las precauciones lingüísticas adoptados en los textos clásicos.) La deficiencia de esta posición, según nuestro parecer, consiste en que el constructivismo no es «otra matemática». Esto es un subsistema muy refinado de las matemáticas clásicas que rechaza sus extremos y que trata con cuidado el aparato de cálculo efectivo.

Desgraciadamente, parece que precisamente los «extremos»—extrapolaciones valientes, abstracciones infinitas y que no se dejan interpretar constructivamente—dan eficacia al aparato. Es difícil imaginarse cual ayuda podrían prestar las matemáticas a la física cuántica del siglo XX, si en el transcurso del último centenario el aparato de las mismas se desarrollase sólo sobre la base de la abstracción del «objeto constructivo». Cualesquiera cálculos estándares con representaciones de dimensiones infinitas de los grupos de Lie que hoy en día desempeñan un importante papel en la comprensión del micromundo, lo más probable no serían inventados.

No se excluye que es conveniente buscar nueva (o bien olvidada vieja) concepción del continuo, con la cual éste no tendrá ninguna «potencia», en el profundo estudio del mundo exterior. La idea acerca del conjunto que consta de elementos corre verdaderamente el riesgo de resultar adecuado sólo para los conjuntos finitos o numerables, mientras que las «infinidades superiores» puedan resultar abstracciones de objetos de totalmente otro tipo.

La física como si indicara la diferencia de principio del procedimiento del «cálculo» desde la

idealización de la medida según Eudox—Dedekind. Se dejan calcular los dominios materiales de atracción, los «atractores» (R. Thom), los cuales son unidades sin fronteras pronunciadas. Las fracciones de la unidad, incluso si se realizan físicamente, son atractores ya de otra naturaleza, en el micromundo estas representaciones, por lo visto, también pierden el sentido.

Si el carácter estadístico es una propiedad fundamental de la naturaleza, puede resultar fructuoso el examen de los modelos matemáticos, en los cuales aquel aparece en calidad de un concepto indeterminado. La inesperada riqueza de las interpretaciones no estándares de las matemáticas clásicas en los modelos de valor booleano concuerdan con la suposición de que todas las palabras que pronunciamos han de entenderse de otra manera.

9.2. Pasemos ahora al punto de vista menos radical respecto del problema del continuo para el cual éste se considera sensato. Entonces el problema principal continúa consistiendo en cómo se llega a saber el lugar que ocupa el continuo en la escala de álefes.

P. Cohen termina su libro [7] con la opinión siguiente: «El punto de vista el cual, como lo presiente el autor, al fin y al cabo pueda ser aceptada consiste en que la HC es, por lo visto, falsa ... C es mayor que $\aleph_n$, $\aleph_\omega$, $\aleph_\alpha$, donde $\alpha = \aleph_\omega$, etc. Desde este punto de vista C se considera un conjunto tremendamente grande, el cual nos ha sido dado por un cierto axioma nuevo y valeroso y al cual no se puede aproximarse por medio de algún proceso gradual de construcción».

De este modo, aquí se ha dado una estimación hipotética inferior de C y nada más, incluso no hay suposiciones acerca de si es regular o singular el cardinal de C.

Sin embargo, el problema consiste, naturalmente, no sólo en adivinar la hipótesis verosímil. Se debe mantenerla con testimonios indirectos tan convincentes que se haga aceptada sin demostración. ¿Cuál puede ser el carácter de estos testimonios?

Gödel [20], discutiendo cualesquiera nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, escribe lo siguiente: «desde luego, nosotros podemos tener esperanza en alcanzar una comprensión más profunda de las concepciones sobre las cuales se basan la lógica y las matemáticas. lo que permitirá discernir el axioma que nos interesa como consecuencia de estas concepciones».

Sin embargo, haciendo caso omiso de la necesidad interna de algún axioma nuevo e incluso reconociendo la ausencia de esta necesidad, podemos tomar la decisión acerca de la veracidad de dicho axioma mediante otro procedimiento: por inducción, estudiando su «buen éxito», o sea, su carácter fructuoso al deducir corolarios «que se verifican». Tenemos en cuenta corolarios que se demuestran sin este axioma, pero cuyas demostraciones, al utilizarlo, se simplifican considerablemente, se hace más fácil descubrirlos, se logra combinar en un razonamiento muchas distintas demostraciones. Los axiomas de los números reales que se rechazan por los intuicionistas, hasta cierto grado fueron probados en este sentido, porque la teoría analítica de los números a menudo permite establecer teoremas de la teoría de números que más tarde se dejan a demostrar con medios elementales. Pero es supuesto también un grado de seguridad mucho más alto. Pueden ser descubiertos axiomas tan ricos en corolarios a comprobar, que iluminan con luz tan viva disciplinas enteras y que brindan tan fuertes métodos de solucionar problemas (incluso que

los resuelven en cierto sentido constructivo) que, independientemente de su necesidad interna, se conviene aceptar estos axiomas aunque sea en el mismo sentido en el cual se acepta cualquier teoría física bien argumentada».

Poco queda añadir a esta esperanza expresada con energía. No obstante, hay un teorema demostrado por el mismo Gödel; según este teorema en un sistema formal bastante rico, *cualquier* axioma nuevo e independiente reduce tan fuertemente como se quiere las demostraciones de las afirmaciones convenientes las cuales se demuestran sin aquél. Eso atenúa en cierto grado la fe en los criterios pragmáticos de la veracidad.

Conclusión. Acerca del sentido del texto matemático

Los resultados arriba expuestos que ponen de manifiesto la inmensa complejidad de los conceptos «demostrabilidad» y «veracidad» de las afirmaciones matemáticas hacen natural la intención de discutir, cuál es en general el sentido de las abstracciones matemáticas. Los posibles puntos de vista al respecto sirvieron de partida para las distintas escuelas en el campo de fundamentos de las matemáticas las cuales se han formado en el siglo XX. A continuación describiremos brevemente las concepciones de estas escuelas y los problemas a resolver por nosotros.

No obstante, comenzaremos por la observación acerca de que el concepto de sentido del texto matemático por sí mismo es una abstracción de alto nivel. Al estudio más inmediato se entregan los *procesos de intelección del texto*, los cuales se aceptan por nosotros como material de origen. En estos procesos se destacan varios aspectos que alternativamente intervenían en el primer plano

en los distintos actos individuales de intelección. Tenemos la intención de describirlos y proseguir, cómo la absolutización de alguno de estos aspectos define en los problemas de los fundamentos cada una de las posiciones filosóficas que se han formado.

Desde la niñez el hombre aprende entender los textos cotidianos en su lengua natal, paralelamente con la asimilación de la propia lengua, encontrándose en el medio lingüístico homogéneo. Así, en la conciencia individual se forma el núcleo potencial de los textos que se comprenden de una vez y unívocamente. Esta indivisibilidad del proceso de entendimiento del texto cotidiano permite atribuirle la presencia de un determinado sentido. Desde luego, cuando este proceso de entendimiento llega a ser objeto de estudio de los psicólogos, lingüistas, psiquiatras resulta que es muy complicado y tiene una organización jerárquica. Aquí lo podemos considerar como un todo, y el sentido producido por esta intelección, como una abstracción legítima.

Una cosa diferente ocurre con las lenguas de la ciencia. Al crear un concepto natural-científico de turno, un sistema de conceptos o una teoría, así como al efectuar la enseñanza de ellos, los textos se ofrecen juntamente con las instrucciones para su intelección. Estas instrucciones pueden constituir una parte explícitamente distinguida del texto, pero también pueden ser enmascaradas en las construcciones lingüísticas paralelas a las de los textos ya entendidos. Así aparece una expresión aparentemente comprensible «el electrón voló por la rendija *A* (y no por la rendija *B*)» en los manuales de la mecánica cuántica, cuyas «instrucciones» para su intelección es su sintaxis paralelo al sintaxis de la frase «la piedra voló por la rendija *A* y no por la *B*» que se en-

tiende unívocamente. Estas «instrucciones» inducen al error y las explicaciones subsiguientes prolongadas están dedicadas a la introducción de la frase «amplitud de paso del electrón por la rendija *A*» construida correctamente para el lenguaje de la mecánica cuántica y a las instrucciones para su intelección. En el extremo lejano de tal jerarquía de instrucciones se encuentran habitualmente las descripciones de los procedimientos operacionales de las ciencias experimentales: de las medidas, observaciones, etc. La intelección del texto incluye en sí una comprensión más o menos completa de esta jerarquía.

La originalidad de los textos matemáticos suele consistir en la ausencia de tales procedimientos operacionales a los cuales el contenido del texto se reduzca en fin de cuentas. No obstante, en ciertas situaciones tal aspecto «realista» en la intelección del texto matemático desempeña el papel principal.

Luego, interpretando el texto matemático el matemático hace uso de imágenes visuales, cinemáticas y otras más o menos determinadas que surgen en su consciencia. El aspecto respectivo del sentido lo llamamos «interno».

Por último, interpretando el texto en su relación con otros textos reales o potenciales, o sea, construyendo sus traducciones a otros sublenguajes, haciendo explícitas las definiciones, formalizando, etc., el matemático se dirige al aspecto «exterior» del sentido.

Examinemos como ejemplo sencillo la intelección del concepto «dos» en los contextos «toma dos manzanas», «dualismo filosófico» y «el sexto signo después de la coma en la descomposición decimal de π es dos». En el primero de los mismos lo más esencial es el aspecto realista del sentido, en el segundo, el interno, puesto que la repre-

sentación acerca de «dos» debe aplicarse a un sistema conceptual tan compleja como «esencias iniciales que, por suposición, son la base del mundo entre los límites de los sistemas filosóficos de una cierta clase». Por último, en el tercer contexto prevalece el sentido exterior ya que la comprensión de este texto apela a la reconstrucción de cierto método de cálculo aproximado de π, método de obtención de decimales de aproximación respectiva, método de estimación de la exactitud de la aproximación, etc.

Preocupémonos de la descripción de estos aspectos del sentido y de su influencia en la elección y estimación de uno u otro sistema de fundamentos de matemáticas más detalladamente.

a) *Aspecto realista de la semántica.* No cabe duda que desempeña el papel principal en las matemáticas «aplicadas» en el sentido lato de la palabra. Aquí entran, naturalmente, los cálculos de ingeniería y económicos. Lo mismo se refiere también al aparato de la física teórica, sin embargo, aquí bruscamente crece el papel y la complejidad de los procedimientos de explicación del sentido físico de los cálculos. Por esta causa la estrictez formal matemática de los cálculos para el físico puede retroceder al segundo plano si las reglas de interpretación sirven de factor formador de formas más fuerte de la teoría. Así es el estado de cosas con los procedimientos del cambio de reglamentación en la electrodinámica cuántica los cuales para las matemáticas parecen ser reglas de inferencia que se introducen ad hoc en el texto formal, pero obtienen una intelección y justificación final al coincidir las correcciones de radiación calculadas con las medidas experimentalmente. La física brinda modelos importantísimos de pluralidad de las interpretaciones realistas

de la misma teoría matemática: la ecuación de la onda puede describir la oscilación de una cuerda y la dispersión de los electrones; la integral puede responder al objeto, a la carga, al camino o a la probabilidad; se pueden aducir ejemplos hasta el infinito. La acentuación de esta idea conduce a muy diferentes concepciones tales como el «convencionalismo» de A. Poincare, «relativismo de la teoría de conjuntos» de Skolem o interpretación de teoría de conjuntos de la lógica intuicionista.

Para un «puro» matemático el aspecto realista del sentido puede prevalecer, cuando el texto se interpreta como una descripción del procedimiento algorítmico que se realiza con los mismos textos. Tales son los algoritmos de escuela de las operaciones con las fracciones decimales o las reglas matemáticas de substitución del término en la fórmula. Por último, el sentido del programa para el ordenador es la sucesión de estados, la cual reproduce ésta obrando de acuerdo con el programa. Exagerando un poco se puede decir que el funcionamiento del ordenador es uno de los procedimientos de intelección del programa. Las matemáticas de Egipto y Babilonia fueron casi totalmente «realistas», y así es la semántica de los manuales tradicionales de escuela para las clases menores.

Es preciso subrayar que la palabra «realista» ha de entenderse en el sentido lato en nuestras explicaciones. Incluso cuando su interpretación se efectúa en términos de procedimientos empíricos, entendemos siempre en realidad ciertas abstracciones, y a menudo muy refinadas. Estas abstracciones pueden ser no sólo natural-científicas sino también filosóficas: la suposición acerca de la existencia de cierto mundo «neoplatoniano» de conjuntos permite concernir a la «realista» la filosofía de las matemáticas clásicas

de la teoría de conjuntos. El rechazamiento de este mundo como irreal y su reemplazo por otro mundo más real de textos y procedimientos algorítmicos sobre ellos caracteriza «otro realismo» de las matemáticas constructivas. La orientación hacia la realidad del mundo físico y la interpretación de las matemáticas en términos de las ciencias naturales predetermina la filosofía «aplicada» de las mismas, que casi no está formulada sistemáticamente aunque se crea diariamente por los físicos.

b) *Aspecto interno de la semántica*. Como ya se ha dicho este aspecto se revela en cada acto individual de intelección como un «sentido intuitivo» del texto que se hace explícito con dificultad y que depende de la consciencia individual.

Cada hombre tiene acceso directo solamente a su propia consciencia. La autoobservación y los medios lingüísticos permiten crear cierta imagen exterior de sus actos de razonamiento, no obstante, poco perfecto e incompleto. Al hacerlo, el componente fundamental subconsciente ora se cae en general de la descripción, ora se deforma brutalmente como resultado de las intenciones de su exteriorización.

Por estas causas las descripciones existentes del sentido intuitivo de los textos conciernen a conceptos aislados y a actos de razonamiento elementales. Además de los filósofos y psicólogos, estupendos modelos de tales descripciones los dejaron B. Pascal, P. S. Laplace, A. Poincare, J. Hadamard. La comunidad de las estructuras anatómica y funcional del sistema nervioso central de distintas personas por una parte y la de experiencia y de los conocimientos prácticos lingüísticos por otra permite desprender cierto conjunto de unidades elementales de expresión

para el «lenguaje de los sentidos intuitivos». Aquí pueden penetrar tales términos bizmatemáticos como «cantidad», «proximidad»; en un nivel más alto, «relación», «continuidad/discreción», en un nivel aún más alto, «algoritmo». En el papel de tales unidades de expresión pueden intervenir también dibujos esquemáticos.

La atribución del estado de término al concepto intuitivo en el subsistema axiomatizado de las matemáticas lo conduce del nivel de la «semántica interna» al nivel de la «semántica exterior». En este caso la precisión del sentido se produce a costa del rechazo de las posibilidades potenciales encerradas en la imagen intuitiva. Así, el concepto intuitivo «variable infinitésima actual» fue rechazado totalmente en la motivación clásica del análisis, luego renació en los conceptos exactos del «elemento nilpotente» en las geometrías algebraica y diferencial de la actualidad y del «número infinitésimo» en los modelos no estándares de los campos reales de los lógicos. Conservando ciertos rasgos del arquetipo intuitivo estas interpretaciones «exteriores» de la variable infinitésima no coinciden y desvían el pensamiento hacia distintas direcciones.

El conujnto de unidades de sentido interno individual e históricamente es variable, es abierto y débilmente estructurado. La asimilación del material nuevö conduce a la formación de nuevas unidades. Por ejemplo, la interacción de las partículas elementales entre sí y con el campo en la física puede ser descrita en el lenguaje de los «grafos de Feynman». Cada uno de tales grafos «es» un dibujo de puntos de distinta clase unidos con aristas-líneas de distintas clases. Interpretando dicho grafo de «manera realista» el físico verá en la parte de sus aristas-las líneas mundiales de las partículas elementales. La otra parte

de aristas que no se deja interpretar de tal manera se confrontará con las partículas «virtuales». Así se origina una nueva unidad cómoda del sentido intuitivo que responde a los hechos no observables, sino a unidades de expresión intermedias en el lenguaje adoptado. De forma análoga surgieron los «quarks» que responden a las representaciones irreducibles de cierto grupo. El problema acerca de la «existencia real» de las partículas virutales o de los quarks necesita una fina interpretación que anteceda a las intenciones de resolverlo.

Notemos, por último, que la intelección «exterior» del grafo de Feynman supone, por ejemplo, saber escribir por éste el correspondiente término de la serie de la teoría de las perturbaciones, y que la intelección «exterior» de los quarks supone saber descomponer el producto tensiorial de dos representaciones en la suma de los componentes irreducibles.

Cualquier concepción sucesiva de los fundamentos de matemáticas tiende a limitar el fondo de unidades usuales del sentido intuitivo por el mínimo imprescindible, efectuándose tanto la selección de las unidades de expresión tolerables como la restricción de la extensión de su contenido intuitivo. Después de eso las demás unidades aceptables de la intuición se estructuran reduciéndose a las elementales.

La aceptación del lenguaje de la teoría de los conjuntos preparada por la «aritmetización del continuo» en realidad permitió reducir bruscamente el campo, necesario para el matemático, de las unidades elementales del sentido «interno» o, según N. Bourbaki, de las «distintas intuiciones», sin disminuir el volumen de las matemáticas clásicas. Después de aprender interpretar los conceptos de la teoría de conjuntos y construcciones,

el matemático podía dejar de recurrir a la intuición como único manantial de muchos otros conceptos. La «curva», por ejemplo, se hizo una construcción compleja de la teoría de conjuntos pero que se deja transmitir de manera inequívoca.

El estudio ulterior de este concepto pudo descubrir en éste tanto las propiedades anteriores «intuitivamente obvias», como también totalmente nuevas, a la manera de la existencia de la curva de Peano que llena el cuadrado lo que parecía ser bruscamente contradictorio a la intuición (A. Poincare). La teoría de conjuntos libró la mayoría de los matemáticos de la anarquía de diferencia de las intuiciones individuales, verdad es que a costa de establecer la tiranía de la menoría que intenta conseguir la aclaración intuitiva y la concordancia del sentido interno del único concepto principal «conjunto» que primeramente parecía tan seguro.

Examinemos de este punto de vista varias alternativas del lenguaje de la teoría de conjuntos. La primera de las mismas es el lenguaje dual de las «propiedades», «predicados», etc. Su expresión elemental «poseer propiedad» reemplaza la expresión «ser elemento del conjunto». La semántica del concepto «propiedad» que se considera por primordial, en la intuición no está obligada a ser totalmente equivalente a la del concepto «conjunto de elementos con propiedad dada» aunque fuese por el simple hecho de que la claridad de la propiedad «ser rojo» no requiere en absoluto la claridad del «conjunto de objetos rojos» tomando en consideración al menos la presencia de la escala de los matices del color. Es más, en las matemáticas precantorianas el lenguaje de las propiedades se utilizaba precisamente para reemplazar la infinidad tabulizada

actual. En efecto, intuitivamente la «verificación de lo que el objeto posee la propiedad dada» difiere fuertemente de la «reunión de todos los objetos con la propiedad dada».

No obstante, en los sistemas de Russel—Whitehead, Quine y otros autores la formalización del lenguaje de las propiedades en las «teorías de los tipos» se utilizaba precisamente para argumentar la teoría de conjuntos. El objetivo pragmático consistía en tal restricción del universo y de los medios lingüísticos para que se haga imposible la aparición de paradojas de tipo de Russel.

Para la teoría de tipos la «realidad» es el universo el cual consta de los individuos (de tipo nulo), sus propiedades (de primer tipo), de las propiedades de sus propiedades (de segundo tipo), etc. hasta el infinito. La paradoja de Russel no es reproductible, ya que la propiedad de «ser propiedad que no la posee misma» no pertenece al universo. En este universo, no obstante, no es cómodo interpretar las matemáticas clásicas ya al nivel del lenguaje y casi imposible al nivel de las axiomas de existencia: el «axioma de reductibilidad» específico que se postula por Russel no le satisfacía a el mismo. Las variantes de la teoría de tipos se asocian con la tesis «logística» según la cual las matemáticas son reductibles a la lógica por causas históricas e intuitivas. Es poco probable que esta misma tesis posea un contenido nítido (véase Kleene [3]).

En las matemáticas intuicionistas tanto el lugar del «conjunto» como el de la «propiedad» lo ocupa aproximadamente la expresión «ley de formación»; no obstante, la orientación de principio del intuicionismo hacia el carácter no importante del «sentido exterior» de sus textos, en particular, el carácter inadecuado de cualquiera

de las formalizaciones impide que esta confrontación se conduzca demasiado lejos.

Para Brouwer y su escuela de intuicionismo el objeto de la intuición inicial es la serie de los números enteros 0, 1, 2, 3, . . ., que en este caso se considera no como terminada, sino como una que se forma por medio de la ley de paso de n a $n + 1$. Correspondientemente la inducción se considera por prototipo principal de todas las construcciones admisibles en matemáticas. Por si mismas las construcciones deberán realizarse con ayuda de los medios finitos sobre objetos finitos, y la existencia del objeto matemático se comprende como una posibilidad de construirlo. Eso excluye las demostraciones de la existencia «por reducción al absurdo» que no se acompañan por la presentación del objeto respectivo en el caso cuando éste deba elegirse del conjunto potencialmente inifinito. Eso es el conocido principio de no aplicabilidad de la ley del tercer excluido en los dominios infinitos.

El continuo de Brouwer representa un «ambiente de formación libre», digamos, de fracciones decimales infinitas no actualmente, sino potencialmente, el cual, en términos clásicos, se hace explícito con dificultad y en el cual, no obstante, la elección de las decimales sucesivas no está subordinada a ninguna ley.

Kronecker füe el primer propagador de limitaciones, que se imponen por tal punto de vista sobre las matemáticas, y uno de los más poderosos contrarios de Cantor. Brouwer y sus adeptos aplicaron muchos esfuerzos para aclarar los contornos de las matemáticas intuicionistas y de la lógica desarrollando sus principios positivos. Sin embargo, ellos, en particular, Heyting, siempre subrayaban el primado de la interpretación interna de los textos matemáticos y las posibilida-

des limitadas de su transmisión en las teorías axiomáticas que se entienden unívocamente. De estas posiciones filosóficas la falta de disposición de aceptar la interpretación interna de la teoría de conjuntos al estilo de Cantor puede parecer inexplicable: muchos matemáticos reconocen la interpretación interna de la teoría de conjuntos en su totalidad. Para explicarlo los intuicionistas aducen argumentos psicológicos a favor del primado de la idea del desmembramiento, discontinuidad y, quiere decir, de la numerabilidad potencial como único tipo legal de la infinidad. A los intuicionistas les son propias también las apelaciones al sentido «realista» de las matemáticas; en uno de los artículos Brouwer afirma que el empleo del principio del tercer excluido en las ciencias naturales depende de que el mundo físico es finito y discreto.

El constructivismo de la escuela de A. A. Markov comenzó a formarse a fines de los años cuarenta como variante del intuicionismo que utiliza las precisiones de los conceptos del objeto constructivo y algoritmo a base de la teoría de las funciones recursivas o de sus variantes. Sin meterse aquí en los detalles de las definiciones indicaremos sólo ciertas orientaciones características de principio de esta escuela.

La «realidad» de los constructivistas la constituyen los textos en alfabetos finitos que se someten a procesos de tratamiento los cuales son algorítmicos y en particular también son descritos por textos en alfabeto finito.

La infinidad potencial se admite como una abstracción de los textos de longitud no limitada de antemano y de los algoritmos que funcionan un tiempo no limitado con anticipación; la infinidad actual se rechaza.

La existencia del objeto matemático se inter-

preta ora como su presentación ora como una posibilidad de construirlo algorítmicamente. La sutileza esencial consiste en que según A. A. Márkov la posibilidad de la construcción algorítmica por sí misma puede ser establecida con medios clásicos y no exclusivamente por presentación de tal construcción. En particular, en tales demostraciones puede aprovecharse la reducción a la contradicción.

El continuo constructivo está representado por pares de algoritmos de los cuales el primero prefija la sucesión calculable de Cauchy de los números racionales y el segundo, las estimaciones explícitas de la velocidad de convergencia (en el sentido clásico). Desde le punto de vista de las matemáticas clásicas el continuo constructivo es numerable, además, a) la propiedad del par de algoritmos de definir el número real algorítmicamente es insoluble; b) la propiedad de dos tales pares de definir el mismo número es insoluble; precisamente así mismo es insoluble la propiedad de representar dicho número. Por estas causas el análisis constructivo difiere bruscamente del corriente. Por ejemplo, como funciones de una variable real se consideran algoritmos que traducen el número real constructivo en otro semejante. Pero entonces una función simple como $f(x) = -1$ para $x \leqslant 0$, $f(x) = 0$ para $x > 0$, no existe en el análisis constructivo, pues en el caso contrario fuese soluble la propiedad del número de «ser cero». En la realidad, todas las funciones constructivas son continuas en el sentido clásico de de la palabra.

La «realidad» con la cual las matemáticas clásicas confrontan sus construcciones, para la mayoría es algo parecido a la «realidad» de Platón del mundo de ideas. Desde el punto de vista del materialismo filosófico eso es una realidad subli-

mada y exteriorizada de las conciencias individuales que reflejan el mundo exterior; desde el punto de vista del platonismo, una realidad independiente de la conciencia y que se encuentra con ella en harmonía preestablecida. Nosotros también podemos considerar este mundo como una parte general de proyecciones fuera de los sentidos interiores de las matemáticas en las conciencias individuales. La representación sobre la unidad de tal mundo podía existir sólo hasta que las voces protestantes de los eminentes matemáticos del mundo demostraran lo contrario.

No obstante, es poco probable que se pueda considerar definitivas cualesquiera argumentos que se han enunciado respecto a la semántica del concepto «conjunto» en las matemáticas. Su análisis atento muestra la extremada pobreza del material científico utilizado.

Por ejemplo, criticando la infinidad actual cantoriana de esencias discernibles desde las posiciones «realistas» se podría notar que ésta absolutiza (hace absoluta) no tanto la experiencia de tratamiento con el finito como la física cotidiana de la cordura, en la cual el mundo se compone de cosas aisladas que pueden ser contadas, ordenadas, reunidas, etc. La física cuántica sugiere entonces abstracciones del mundo de totalmente otro tipo, en el cual el «conjunto» de electrones, digamos, se compone de esencias distintas, pero no discernibles, en el cual la lógica no refleja la del habla corriente orientada hacia el micromundo, pero tampoco coincide con la lógica del intuicionismo: en general con cualquiera de las versiones que se han propuesto por los filósofos de las matemáticas. La infinidad del micromundo «adentro» y «a lo ancho» con sus aspectos probabilísticos y de campo totalmente no se parece a la cantoriana y seguramente es

irreducible a la sucesión de los «actos elementales de discernimiento», no importa como considerarla: actual o potencial. El predicado mismo «ser elemento» tiene en el micromundo un estado dudoso.

Por otra parte, tanto los razonamientos psicológicos de Brouwer, Heyting como los de otros apelan en lo general a la autoobservación elemental y totalmente no toman en consideración los alcances de las psicología y neurofisiología científicas. Se puede decir que la gran atención prestada a los aspectos constructivos de las matemáticas permitió destacar el concepto de la máquina universal de Turing como «factor mínimo común» de todas las consciencias individuales. Su base fisiológica es la actividad motora discretizada con empleo de los receptores más sencillos, por ejemplo, de los táctiles.

La infinidad potencialmente numerable de los intuicionistas y constructivistas es una que está al alcance de este factor. No obstante, la intuición geométrica, sobre la cual se funda la infinidad del continuo, se ignora totalmente con tal manera de abordar la cuestión. Su base fisiológica es la actividad motora más amplia que se apoya sobre los procesos más complicados de tratamiento de la información mediante los receptores visuales de las zonas corticales respectivas. La descripción neurofisiológica de estos procesos sólo se comienza, pero ya es bien claro que las concepciones supersimplificadas de la intuición matemática que se proponen en el ardor polémico están lejos de la realidad.

c) *Aspecto exterior de la semántica.* Este aspecto complementa el interno en el mismo sentido en el cual la descripción de las reglas de uso de la palabra «conjunto» complementa su definición según Cantor. Interpretando el texto matemático

de modo «exterior» el matemático puede construir sus traducciones a otros sublenguajes (de las fórmulas a los gráficos y viceversa), componer distintas abreviaturas del texto o, al revés, reconstruir los detalles omitidos de las demostraciones, experimentar con el cambio de las premisas, etc. El «sentido exterior» del texto matemático es su sentido de trabajo para un matemático profesional, cuando éste escribe un artículo, enseña matemáticas a los estudiantes o se comunica con sus colegas. El procedimiento de la intelección exterior no está obligado a ser y raras veces suele ser dato completo, exacto y rectilíneo con respecto a los conceptos fundamentales (así es sólo su modelo en la teoría formal). Dicho procedimiento contiene círculos, atolladeros y saltos. La intelección de la recta euclidiana como modelo de los números reales, y de los números reales como conjuntos de puntos de la recta no define ninguno de estos conceptos, pero esclarece el sentido de los dos.

Interpretando de la manera «realista» la función delta de Dirac ($\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, $\delta(0) = \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$), el físico se la imaginará, digamos, como una masa unitaria puntual de densidad infinita. Para el matemático la variante un poco más abstraída de esta representación concernirá más bien a la categoría de la semántica «interna». Y sólo después de obtener la posibilidad de comprender la función delta de manera «exterior» como funcional sobre un espacio de funciones finitas, y después de incluirla de este modo como un término bien definido en los formalismos del análisis y como objeto particular de la teoría de conjuntos en las teorías de las matemáticas generales, el matemático se

sentirá completamente tranquilo. Sin embargo, el físico puede por completo quedar satisfecho con el formalismo exterior para el caso dado sin postular en absoluto su reductibilidad a la teoría de conjuntos.

El componente filosófico de las concepciones formalistas de las matemáticas está precisamente relacionado con la absolutización de su aspecto exterior, cuando el contenido totalmente se identifica con la forma. La cristalización de las matemáticas formales en las obras de Hilbert y de su escuela la debemos de nuevo a las dificultades de la teoría de conjuntos.

La innovación de Cantor ante todo se manifestó en la creación de una teoría no formal de «órdenes de la infinidad». Desde el punto de vista lingüístico eso significaba la introducción implícita de algunos axiomas de la existencia de conjuntos (incluso la axioma del conjunto de partes y la axioma de la elección), el uso de construcciones lingüísticas de tipo nuevo (como definición de la ordenación completa) y, por último, el empleo libre de la lógica del finito en el nuevo mundo infinitario (en particular, de la ley del tercer excluido).

Desde luego, tal estimación de la obra de Cantor se hizo posible solamente en la retrospección, para él y mucho tiempo después de él el primer lugar lo ocupaba la semántica de la infinidad actual de tipo platoniano, aunque, posiblemente, no revelada hasta el final. En todo caso las afirmaciones y problemas acerca de la existencia de unos u otros conjuntos se percibían como tales que tenían un sentido comprensible para todos. Los mismos conjuntos, cuya existencia se confirmaba, podían asignarse por indicación de la propiedad de su elemento común o por la construcción de algunos conjuntos ya dados.

El traslado de la acentuación desde el «sentido» al «texto» ha sido provocado precisamente por la crítica de tal semántica tanto debido al descubrimiento de las paradojas como debido a la inadmisibilidad intuitiva para muchos del teorema de Zermelo acerca de la posibilidad de ordenar bien cualquier conjunto. El punto de vista de Hilbert consistía en que no todos los conceptos matemáticos y razonamientos en general habían de ser interpretados directamente en los términos finitos. Los que no admiten tal interpretación son construcciones lingüísticas «ideales» que se adjuntan al sistema para simplificar las demostraciones de los teoremas, estandarizar el lenguaje, etc. No obstante, su admisión al sistema requiere que se observen determinadas reglas de higiene la principal de las cuales es el carácter no contradictorio del mismo. El carácter no contradictorio debe ser asegurado con anticipación por investigación minuciosa de la sintaxis del lenguaje que ya debe realizarse sin que se apele a la infinidad actual.

La totalidad de los modelos formales de las matemáticas y de la lógica que se ha originado como resultado de ejecución de este programa ha sido su resultado más importante. En particular, la formalización de los conceptos matemáticos exactos del «carácter calculable» y «algoritmo» y de toda la teoría de las funciones recursivas está estrechamente enlazada con el programa de Hilbert. La imposibilidad de su cumplimiento en el volumen descrito descubierta por Gödel constituye el otro aspecto del problema. Es difícil decidir si atestigua esta imposibilidad a favor de la aceptación de la teoría intuitiva del conjunto, como la conocemos ahora, o de su rechazo; con los mismos motivos este problema ya puede plantearse para la aritmética.

En todo caso, el punto de vista a las matemáticas como a un sistema formal es muy fértil si se da cuenta de su limitación. Este punto de vista permite alcanzar una comprensión mutua considerable al analizar tales concepciones distintas como la lógica intuicionista y la física teórica proporcionando «esquemas vacíos» de estructuras complejas. El carácter no contradictorio del sistema formal cuyo efecto benéfico ha sido comprobado experimentalmente deja de ser un problema primordial. La elección de los textos generados concretamente en tal sistema los cuales constituyen una parte muy insignificante de todos los textos tolerables, a pesar de todo se realiza según las reglas que no se formalizan y que son más importantes que el carácter no contradictorio formal el cual se describe en los términos de todos los textos que pueden ser engendrados. El papel de los textos que se eligen consiste en la mediación importantísima aunque mal estudiada entre el cerebro y otro tanto, entre el cerebro y el mundo exterior, así como entre el cerebro y sí mismo (el texto es la memoria exterior, el texto establece el puente entre las intuiciones geométrica y aritmética de cada conciencia individual, las cuales, posiblemente, se apoyen sobre mecanismos fisiológicos esencialmente distintos). En fin de cuentas, el aspecto principal del texto es su capacidad de participar en tales actos de mediación, y sólo el estudio de esta capacidad puede resolver el enigma de las matemáticas. La vieja metáfora de V. Hugo que confronta el libro con la catedral tiene un sentido profundo si la estructuración del texto constituye una premisa más importante de su papel social.

Todos estos problemas contribuyen a lo que las matemáticas se hagan humanitarias; junto con el movimiento al encuentro de «matematización»

de los conocimientos humanitarios ellos ayudan a devolver la unidad perdida de las dos culturas. En previsión de la síntesis podemos esperar una comprensión nueva del «conjunto» como una de las más asombrosas gemas mitológicas de la actualidad.

Bibliografía

Libros y artículos sobre la lógica matemática y la teoría de los conjuntos

1. **Shoenfield J.** Mathematical Logic, Addison-Wesley, 1967
2. **Mendelson E.** Introduction to Mathematical Logic
3. **Kleene S.** Introduction to Metamathematics, New York, 1952
4. **Lyndon R.** Notes of Logic, Priceton, 1966
5. **Bourbaki N.** Théorie des ensembles, Paris, 1958
6. **Rosser J. B.** Logic for Mathematicians, New York, Putnam, 1953
7. **Cohen P.** Set Theory and the Continuum Hypothesis, New York, 1966

Libros y artículos acerca da la teoría de las funciones recursivas y los algoritmos

8. **Марков А. А.** Теория алгоритмов, Труды мат. ин-та В. А. Стеклова АН СССР, 1954, т. 42 (Markov A. A. Teoría de los algoritmos)
9. **Успенский В. А.** Лекции о вычислимых функциях, М., Физматгиз, 1960 (Uspenski V. A. Lecciones sobre las funciones calculables)
10. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1966 (Maltsev A. I. Algoritmos y funciones recursivas)
11. **Rogers H. Jr.** Theory of Recursive Functions and Effective Computability, New York, 1967
12. **Матиясевич Ю. В.** Диофантовы множества, УМН, 1972, т. 22, вып. 5, с. 185—222 (Matiyasevich Yu. V. Conjuntos diofánticos)
13. **Манин Ю. И.** Десятая проблема Гильберта, Современные проблемы математики, Под ред. Р. В. Гам-

крелидзе, М., ВИНИТИ, 1973, вып. I, с. 5—37 (Manin Yu. I. Décima problema de Hilbert)
14. **Манин Ю. И.** Теорема Геделя, Природа, 1975, № 2, с. 80—87 (Manin Yu. I. Teorema de Gödel)
15. **Успенский В. А.** Теорема Геделя о неполноте в элементарном изложении, УМН, 1974, т. 29, вып. 1, с. 3—47 (Uspenski V. A. Teorema de Gödel sobre la incompletitud en interpretación elemental)

Libros y artículos sobre los problemas acerca de los fundamentos de las matemáticas

16. **Tarski A.** Introduction to Logic and Methodology of Natural Sciences
17. **Fraenkel A., Bar-Hillel Y.** Foundations of Set Theory, Amsterdam, 1958
18. **Тростников В. Н.** Конструктивные процессы в математике, М., Наука, 1975 (Trostnikov V. N. Procesos constructivos en las matemáticas)
19. **Cohen P.** Foundations of Set Theory
20. **Gödel K.** What is Canotor's continuum problem? American Mathematical Monthly, 1947, v. 54, № 9
21. **Lakatos I.** Proofs and Disproofs

Otros trabajos citados

22. **Cartan A., Eilenberg S.** Homological Algebra, Priceton, 1956
23. **Lindsey C., van der Meulen S.** Informal Introduction to ALGOL-68, Amsterdam, 1971
24. **Гладкий А. В., Мельчук И. А.** Элементы математической логики, М., МИР, 1969 (Gladki A. V., Melchuk I. A. Elementos de la lógica matemática)
25. **Ивин А. А.** Логика норм, М., МГУ, 1973 (Ivin A. A. Lógica de las normas)
26. **Лурия А. Р.** Потерянный и возвращенный мир, М., МГУ, 1971 (Luria A. R. El mundo perdido y recuperado)
27. **Стеблин-Каменский М. И.** Культура Исландии, Л., Наука, 1967 (Steblin-Kamenski M. I. Cultura de Islandia)
28. **von Neumann J.** Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik, Berlin, Springer, 1932
29. **Mackey G.** The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. A Lecture-Note Vol., New York, 1963
30. **Reid C.** Hilbert, Berlin, Springer, 1975
31. **Ŝmullyan R. M.** Languages in which selfreference is possible, J. Symbolic Logic, 1975, v. 22, № 1

32. **Selfridge J., Nicol C. A., Vandiver H. S.** On the loust Fermat theorem, "Proc. National Academy USA", 1955, v. 41, p. 970—973
33. **Swinnerton-Dyer H. P. E.** On the product of three homogeneous linear forms, "Acta Arithmetica", 1971, v. 18, p. 371—385
34. **Siegel C.-L.** Zuzwei Bemerkugern Kummers, "Nachrichten Ak. Wiss. Götingen, Math.-Phys. Klasse", 1964, № 6, p. 51—57
35. **Mumford D.** Equations defining abelian varieties, Inventiones Mathematicael, 1967, v. 3, p. 3
36. **Kochen S., Specker E. P.** The Problem of hidden variables in quantum Mechanics, J. Mathematics and Mechanics, 1967, v. 17, p. 59—87

Indice alfabético de materias y nombres

Indice

Capítulo III. Problema del continuo y forcing

УДК 51—007=60

Юрий Иванович Манин

ДОКАЗУЕМОЕ И НЕДОКАЗУЕМОЕ

Контрольный редактор С. Н. Балашник
Редактор Ю. А. Захаров
Художник С. И. Кравцова
Художественный редактор Л. Н. Подмарькова
Технический редактор Л. П. Бирюкова
Корректор Г. И. Власова

ИБ № 2850

Сдано в набор 25.12.80.
Подписано к печати 29.04.81.
Формат 74×90 1/32.
Бумага типографская № 1.
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Объем 4,13 бум. л. Усл. печ. л. 10,15. Усл. кр.-отт. 10,29.
Уч.-изд. л. 11,80. Изд. № 19 1162.
Тираж 7000 экз. Зак. 01152. Цена 1 р. 34 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва 103001, Трехпрудный пер., 9.

2500000000

М $\frac{30501-246}{041(01)-81}$ инф. письмо

En la actualidad los métodos matemáticos se utilizan ampliamente en las ciencias naturales y humanitarias. Ello contribuye a que entre los amplios círculos de usuarios de matemáticas crezca el interés hacia la misma esencia del razonamiento matemático y hacia la naturaleza de la demostración. En el libro se hace la intención de satisfacer dicho interés. La presentación va acompañada de digresiones a la física, psicología y semiótica.